9. Підпрограми

6.1. Складати програму обчислення добутку

$$p=f_0*f_1*\ldots*f_n,$$

де $f_l=\frac{1}{l^2+1}+\frac{1}{l^2+2}+\ldots+\frac{1}{l^2+l+1}$

6.2. Два простих числа називаються "близнюками", якщо вони відрізняються один від одного на 2 (наприклад, числа 41 та 43). Скласти програму виведення на друк всіх пар "близнюків" з відрізку $[n, 2*n]$, де n - задане ціле число, яке більше 2.

6.3. Дано натуральне число n та послідовність натуральних чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Показати всі елементи послідовності, які є
а) повними квадратами;
б) степенями п'ятірки;
в) простими числами.
Визначити відповідні функції для перевірки, чи є число: повним квадратом, степенню п'ятірки, простим числом.

6.4. Дано натуральне число n. Для чисел від 1 до n визначити всі такі, які можна представити у вигляді суми двох повних квадратів. Описати функцію, яка перевіряє, чи є число повним квадратом.

6.5. Дано парне число $n>2$. Перевірити для нього гіпотезу Гольдбаха, яка полягає в тому, що кожне парне число $n>2$ можна представити у вигляді суми двох простих чисел. Визначити функцію, яка перевіряє, чи є число простим.

6.6. Скласти алгоритм обчислення величини

$$\frac{\sqrt[3]{a}-\sqrt[6]{a^2+1}}{1+\sqrt[7]{3+a}}$$

для заданого дійсного числа $a>0$. Визначити функцію обчислення коренів $y=\sqrt[k]{x}$ з точністю ε за наступною ітераційною схемою

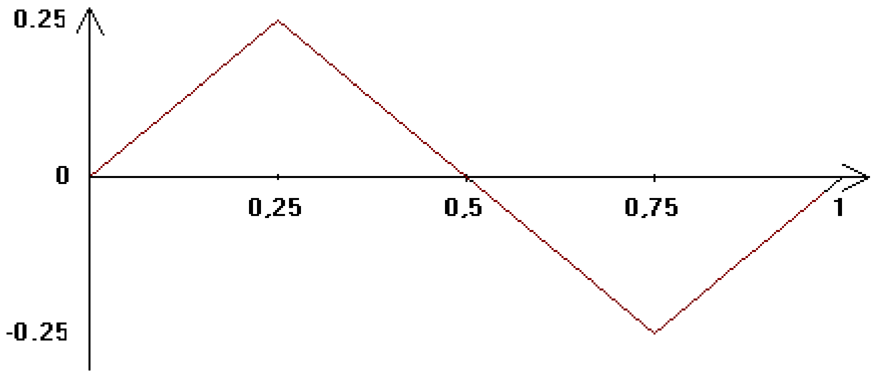
$$y_0=1;\ y_{n+1}=y_n+\left(x\ /\ y_n^{k-1}-y_n\right)/\ k\quad (n=0,1,2,\ldots),$$

взявши за відповідь наближення y_{n+1}, для якого $|y_{n+1}-y_n|<\varepsilon$.

6.7. Використовуючи функцію *y=arctg*(*x*) (*math.atan(x)*), скласти підпрограму для обчислення функції, заданої співвідношенням

$$Arctg(x,y)=\begin{cases} arctg\,\dfrac{x}{y}, \text{ якщо } y>0; \\ \dfrac{\pi}{2}, \qquad \text{якщо } x>0 \text{ і } y>0; \\ \pi+arctg\,\dfrac{x}{y}, \text{ якщо } x\geq 0 \text{ і } y<0; \\ -\dfrac{\pi}{2}, \qquad \text{якщо } x<0 \text{ і } y=0; \\ -\pi+arctg\,\dfrac{x}{y}, \text{ якщо } x<0 \text{ і } y<0. \end{cases}$$

6.8. Скласти програму обчислення значень функції *f(x)*, періодичної з періодом 1 і визначеної на всій числовій вісі. Графік функції зображено на малюнку 6.1



Мал. 6.1 - Графік періодичної функції до завдання 6.7.

Які допоміжні підпрограми будуть потрібні для розв'язку задачі ?

6.9. Визначити функцію для обчислення еліптичного інтегралу

$$I=\int_a^b \frac{dx}{a^2\cdot\cos^2 x+b^2\cdot\sin^2 x},(a<b),$$

який, як показав Гаусс , рівний границі $I=\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} b_n$ монотонно-збіжних послідовностей a_n і b_n, які визначаються рекурентними спів-відношеннями

$$a_0 = a; b_0 = b; a_{n+1} = \sqrt{a_n \cdot b_n}, b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, n = 1,2,\ldots$$

Вказана границя називається арифметико-геометричним середнім чисел a і b.

Вказівка. При виборі умови повторення циклу врахувати , що

$$a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n < \ldots < b_n < \ldots < b_0 = b$$

6.10. Визначити функції для обчислення

а) синуса ; б) косинуса

використовуючи їх розклади в ряд Тейлора.

6.11. Дано координати вершин трикутника і точки всередині його. Використовуючи функцію для обчислення площі трикутника через три його сторони, визначити відстань від даної точки до найближчої сторони трикутника.

Вказівка. Врахувати що площа трикутника обчислюється також через основу і висоту.

6.12. Скласти функцію перевірки заданого рядка на симетричність.

6.13. Перевірити, чи є даний рядок ідентифікатором, натуральним числом, чи ні тим ні іншим. Скласти функції, які визначають чи є заданий символ літерою та чи є даний символ цифрою.

6.14. Скласти функцію, яка визначає позицію першого (останнього) входження заданого символа в заданий рядок.

6.15. Скласти процедуру, яка замінює в початковому рядку символів всі одиниці на нулі, а всі нулі - на одиниці. Заміна повинна виконуватись, починаючи з заданої позиції рядка.

6.16. Скласти процедуру, в результаті звернення до якої з першого заданого рядка видаляється кожний символ, який належить і другому заданому рядку.

6.17. Скласти підпрограму для обчислення значення натурального числа за заданим рядком символів, який є записом цього числа у системі числення за основою b($2<b<16$). Використати функцію, яка за заданим символом повертає відповідну цифру у системі числення за основою b.

6.18. Скласти підпрограму для отримання за заданим натуральним числом рядка символів, який є записом цього числа у системі числення за основою b ($2<b<16$).Використати функцію, яка за заданою цифрою у системі числення за основою b повертає символ, що відповідає цій цифрі.

6.19. Скласти алгоритм додавання „у стовпчик” двох чисел, записаних у вигляді рядків, що є позиційними записами цих чисел у десятковій системі числення. Використати підпрограми:

1) функцію *GetDigit(c)* отримання цифри за символом *c*;
2) функцію *GetSymbol(d)* отримання символа за цифрою *d*;
3) процедуру *AddDigit(n1, n2, p, n)* додавання двох цифр *n1*, *n2* з урахуванням перенесення р та отримманням останньої цифри результату *n*;
4) функцію додавання двох рядків у стовпчик *AddColumn*(*S1*, *S2*).

6.20. Скласти алгоритм множення „у стовпчик” двох чисел, записаних у вигляді рядків, що є позиційними записами цих чисел у десятковій системі числення. Використати підпрограми:

1) функцію *GetDigit(c)* отримання цифри за символом *c*;
2) функцію *GetSymbol(d)* отримання символа за цифрою *d*;
3) процедуру *MulDigit(n1, n2, p, n)* множення двох цифр *n1*, *n2* з урахуванням перенесення *p* та отримманням останньої цифри результату *n*;
4) підпрограму *MulStrChar*(*S*, *c*) множення рядка *S* на символ *c*;
5) підпрограму *AddString*(*S1*, *S2*, *n*) додавання двох рядків у стовпчик зі „зсувом” другого рядка на *n* позицій ліворуч.

6.21. Скласти процедуру "стискання" рядка: кожний підрядок, який складається з кількох входжень одного і того ж символа, замінюється самим цим символом.

6.22. Скласти підпрограми для
а) підрахунку кількості слів рядка;
б) отримання найдовшого слова;
в) отримання найкоротшого слова;
г) отримання всіх слів, які є паліндромами (симетричними);
д) отримання всіх слів, які є ідентифікаторами;
д) отримання всіх слів, які є натуральними числами.

6.23. Скласти рекурсивні підпрограми для обчислень значень функцій

а) $$f(x)=\begin{cases} f\left(\dfrac{x}{2}\right)+\sqrt{x}, \text{ якщо } x \ge 10^{-6}, \\ 0, \text{ якщо } x < 10^{-6}. \end{cases}$$

б) $$f(x)=\begin{cases} f(x+1)+\dfrac{1}{x}, \text{ якщо } 10^{-6}\le x\le 10^{3}, \\ 0, \text{ якщо } x>10^{3}, x<10^{-6}. \end{cases}$$

в) $$f(x)=\begin{cases} f(\ln x)+\ln x, \text{ якщо } x>10^{-6}, \\ 0, \text{ якщо } x\le 10^{-6}. \end{cases}$$

г) $$f(x)=\begin{cases} f(2*x)+f\left(\dfrac{x}{2}\right), \text{ якщо } \dfrac{1}{2}\le x\le 2^{10}, \\ x, \text{ якщо } x<\dfrac{1}{2}, x>2^{10}. \end{cases}$$

6.24. Скласти рекурсивну функцію для обчислення многочленів Ерміта (див. завдання 3.15 б) з теми 3.2. „Програмування рекурентних співвідношень”) і порівняти кількість дій у рекурсивному та нерекурсивному варіантах.

6.25. Визначити рекурсивну функцію обчислення *НСД*(n,m) натуральних чисел, яка грунтується на співвідношенні *НСД*(n,m)=*НСД*(m,r), де r - остача від ділення n на m.

6.26. Визначити рекурсивну процедуру представлення натурального числа Z у вісімковій системі числення.

6.27. Визначити рекурсивну функцію обчислення степеня дійсного числа з цілим показником x^n згідно з формулою

$$x^n=\begin{cases} 1, \text{ якщо } n=0, \\ \dfrac{1}{x^{|n|}}, \text{ якщо } n<0, \\ x*x^{n-1}, \text{ якщо } n>0. \end{cases}$$

6.28. Визначити рекурсивну функцію для обчислення біноміального коефіцієнту C_n^m, $0\le m\le n$, за такою формулою:

$$C_n^0=C_n^n=1;\ C_n^m=C_{n-1}^m+C_{n-1}^{m-1}$$, при $0<m<n$.

6.29. Визначити рекурсивну функцію для знаходження суми додатніх дійсних чисел, які складають непорожню послідовність, за якою слідує від'ємне число.

6.30. Визначити рекурсивну функцію для обчислення числа Фібоначчі F_n для заданого натурального n (див. завдання 10 з теми "Арифметичний цикл"). Порівняти працемісткість рекурсивного і нерекурсивного варіантів.

6.31. Задані натуральні числа a,c,m. Визначити рекурсивну функцію для обчислення $f(m)$ за формулою

$$f(m) = \begin{cases} m, \textbf{ якщо } 0 \le m \le 9, \\ g(m) * f(m-1-g(m)) + m \text{ , } \textbf{у інших випадках} \end{cases},$$

$g(m)$ - остача від ділення $a*n+c$ на 10.

6.32. Визначити рекурсивні функції
а) перевірки заданого рядка на симетричність;
б) побудови рядка, інвертованого по відношеню до заданого;
в) заміни у вихідному рядку всіх входжень даного символа даним рядком;
г) перевірки, чи є один рядок початком іншого;
д) перевірки на входження одного рядка у інший.
<u>*Вказівка*</u>. Нехай Λ*, A, B* $\in$ *W* (Λ - порожній рядок), $x,y \in Ch$.
Для побудови рекурсивних функцій використати співвідношення
а) *сим*(Λ) = *Іст, сим*(*add*(*x,* Λ) = *Іст,*
сим(*app*(*add*(*x, A*)*, y*)) = (*x*=*y*) & *сим*(*A*);
б) *інв*(Λ) = Λ,
інв(*add*(*x, A*) = *app*(*інв*(*A*), *x*);
в) *зам*(Λ*, x, B*) = Λ,
зам(*add*(*y, A*)*, x, B*) = *add*(*y, зам*(*A, x, B*)),
зам(add(*x, A*)*, x, B*) = *B*+*зам*(*A, x, B*);
г) *поч*(Λ*, B*) = *Іст*, *поч*(*add*(*x*, *A*)*,* Λ) = *Хиб*,
поч(*add*(*x*, *A*), *add*(*y*, *B*)) = (*x* = *y*) & *поч*(*A, B*);
д) *вход*(Λ*, B*) = *Іст*, *вход*(add(*x*, *A*), Λ) = *Хиб*,
вход(*add*(*x*, *A*), *add*(*y*, *B*)) = *поч*(*add*(*x*, *A*), *add*(*y*, *B*))$\vee$*вход*(add(*x*, *A*)*, B*).

6.33. Скласти рекурсивну функцію для обчисленя функції Аккермана *Акк*(*n,m*), заданої співвідношенням

Акк(*0,m*)=*m+1;*
Акк(*n,0*)=*Акк*(*n-1,1*)*;*
Акк(*n,m*)=*Акк*(*n-1,Акк*(*n,m-1*)).

Обчислити *Акк*(0,5),*Акк*(1,2),*Акк*(2,2).

Покажемо спосіб обчислення функції Аккермана на прикладі:
Акк(1,2)=*Акк*(0,*Акк*(1,1))=*Акк*(0,*Акк*(0,*Акк*(1,0)))=
Акк(0,*Акк*(0,*Акк*(0,1)))=*Акк*(0,*Акк*(0,2))=*Акк*(0,3)=4.

6.34. Скласти рекурсивну функцію обчислення суми:

$$S_{ij} = \sum_{k_1=j-1}^{i-1} \sum_{k_2=j-2}^{k_1-1} \dots \sum_{k_{j-1}=1}^{k_{j-2}-1} \sum_{k_j=0}^{k_{j-1}-1} 1$$

6.35. Ханойські вежі. Дошка має три стрижні. На перший нанизано N дисків спадного догори діаметра. Потрібно, перекладаючи диски по одному, розмістити їх в початковому порядку на другому стрижні. При цьому більший диск ніколи не повинен розміщуватись над меншим.

Скласти підпрограму, яка ілюструє порядок переміщення дисків. Викликати її при N=3. Підрахувати кількість ходів, які потрібні для переміщення дисків. Знайти її залежність від N.

6.36. Скласти програму, яка відображає всі перестановки цілих чисел від 1 до N.

Вказівка. Множину перестановок цілих чисел від 1 до N можна отримати з множини всіх перестановок цілих чисел від 1 до N-1, вставляючи N в усі можливі позиції в кожній перестановці.

7.40. Скласти підпрограми зі змінною кількістю параметрів для обчислення функцій

$$\text{а) } f(x_1,\dots,x_n) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x_1 > x_2 > \dots > x_n, \\ \sum_{i=1}^{n} |x_{i+1} - x_i| & \text{в інших випадках;} \end{cases}$$

$$\text{б) } f(x_1,\dots,x_n) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x_1 <= x_2 <= \dots <= x_n, \\ \sum_{i=1}^{n-1} 2^{x_i + x_{i+1}} & \text{в інших випадках;} \end{cases}$$

$$\text{в) } f(x_1,\dots,x_n) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } x_1 <= 2^1 <= x_2 <= 2^2 <= \dots <= x_n <= 2^n \\ \prod_{i=1}^{n} x_i, \text{ в інших випадках;} \end{cases}$$

$$\text{г) } f(x_1,\dots,x_n) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \max_i x_i > \sum_{i=1}^{n} x_i, \\ \sum_{x_i>0} x_i, & \text{в інших випадках;} \end{cases}$$

д) $f(x_1,...,x_n)=\begin{cases}0, & \text{якщо } \min\limits_i x_i < \prod\limits_{i=1}^{n} x_i,\\ \sum\limits_{i=1}^{n-1} x_i * x_{i+1}, & \text{в інших випадках;}\end{cases}$

е) $f(x_1,...,x_n,y_1,...,y_n)=\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i^2+y_i^2+x_i*y_i);$

Вказівка: оформити x_i як позиційні, а y_i, - як ключові параметри.

є) $f(x_1,...,x_n,y_1,...,y_n)=(x_1^2+...+x_n^2)*(y_1^2+...+y_n^2)$

Вказівка: оформити x_i як позиційні, а y_i, - як ключові параметри.

ж) $f(x_1,...,x_n,y_1,...,y_n)=\prod\limits_{i=1}^{n}(x_i^3+y_i^3);$

Вказівка: оформити x_i як позиційні, а y_i, - як ключові параметри.

з) $f(x_1,...,x_n,y_1,...,y_n)=(x_1+\frac{1}{y_1})*...*(x_n+\frac{1}{y_n});$

Вказівка: оформити x_i як позиційні, а y_i, - як ключові параметри.

і) $f(x_0,x_1,...,x_n,y_1,...,y_n)=x_0+\sum\limits_{j=1}^{n}(x_j+\prod\limits_{i=1}^{j}y_i);$

Вказівка: оформити x_i як позиційні, а y_i, - як ключові параметри.

и) $f(x_0,x_1,...x_n,y_1,...y_n)=x_0+x_1^2*y_1^2+x_2^2*y_1^2*y_2^2+...+x_n^2*y_1^2*y_2^2*...*y_n^2$

Вказівка: оформити x_i як позиційні, а y_i, - як ключові параметри.

Додати задачі для змінної кількості параметрів та для ключових параметрів а також для lambda-функцій.

7.166. Визначити функцію для обчислення кореня рівняння $f(x)=0$ на відрізку $[a,b]$, на якому $f(x)$ змінює знак, з заданою точністю ε методом ділення відрізка навпіл. Виконати обчислення кореня для функції $f(x)=x^3-7*x-1$.

7.167. Визначити функцію для обчислення кореня рівняння $f(x)=0$ на відрізку $[a, b]$, на якому $f(x)$ змінює знак, з заданою точністю ε методом хорд. Виконати обчислення кореня для функції $f(x)=x^3-7*x-1$.

Вказівка. Обчислюючи корінь методом хорд, з'єднують прямою точки $(a, f(a))$ та $(b, f(b))$ та знаходять точку x перетину цієї прямої з віссю абсцис. Якщо знаки $f(a)$ та $f(x)$ співпадають, далі пошук проводять на відрізку $[x, b]$, інакше – на відрізку $[a, x]$.

7.168. Скласти підпрограми для обчислення визначеного інтегралу а) методом прямокутників;   б) методом Сімпсона.
<u>Вказівка</u> б).Для обчислення інтегралу використати границю

$$I=\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty} S_n,\ S_k=\frac{h_k}{3}\times(f_0+4\times f_1+2\times f_2+4\times f_3+..+4\times f_{n-3}+2\times f_{n-2}+4\times f_{n-1}+f_n),$$

де $f_i = f(a+i*h_k),\ h_k=\dfrac{b-a}{n},\ n=2^k,\ i=0,1,\ldots,n$ і представлення S_k у вигляді

$$S_k = S_k^{(1)} + S_k^{(2)} + S_k^{(4)},$$

де

$$S_k^{(1)}=\frac{h_k}{3}*(f_0+f_n),\ S_k^{(2)}=\frac{h_k}{3}*(2*f_2+2*f_4+\ldots+2*f_{n-2}),\ S_k^{(4)}=\frac{h_k}{3}*(4*f_1+4*f_3+\ldots+4*f_{n-1}).$$

Для обчислення $S_k^{(1)}, S_k^{(2)}, S_k^{(4)}$ використати рекурентне співвідношення

$$S_k^{(1)}=\frac{1}{2}*S_{k-1}^{(1)},\ S_1^{(1)}=\frac{h}{3}*\left[f(a)+f(b)\right],\ h=\frac{b-a}{2}$$

$$S_k^{(2)}=\frac{1}{2}*S_{k-1}^{(2)}+\frac{1}{4}*S_{k-1}^{(4)},\ S_1^{(2)}=0,\ k=2,3,\ldots,$$

$$S_k^{(4)}=\frac{4*h_k}{3}*\left[f(a+h_k)+f(a+3*h_k)+\ldots+f(a+(n-1)*h_k)\right],\ S_1^{(4)}=\frac{4h}{3}*f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

7.169. Нехай *M1,M2,...,*M_n - матеріальні точки, положення яких на площині задано координатами $(x_1,y_1),\ldots,(x_n,y_n)$, а маси визначаються за допомогою вагової функції$g(x,y)$. Положення центру ваги цих точок задано формулами:

$$x=\frac{\sum_{i=1}^{n} g(x_i,y_i)*x_i}{\sum_{i=1}^{n} g(x_i,y_i)};\ y=\frac{\sum_{i=1}^{n} g(x_i,y_i)*y_i}{\sum_{i=1}^{n} g(x_i,y_i)}.$$

Визначити функцію обчислення точки центру ваги (x, y) при заданій ваговій функції $g(x,y)$.

Складену функцію використати для знаходження положення центра ваги n точок при $g(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

7.170. Скласти підпрограму для знаходження елемента дійсного вектора, який задовольняє умову, задану булівською функцією $Q(x)$. Виконати пошук, коли умовою $Q(x)$є:
а) $x=a$; б) $x>a$; в) $a<=x<=b$;
де a, b – задані числа.

T9.1 Скласти функцію для обчислення скалярного добутку двох векторів з використанням lambda-функції для обчислення добутку двох чисел.
Вказівка: використати функцію sum()

T9.2 Скласти функцію для обчислення добутку матриці розміром mxn на вектор розміром n з використанням lambda-функції.
Вказівка: використати функцію обчислення скалярного добутку двох векторів та спискоутворення.

T9.3 Скласти функцію для обчислення добутку вектору розміром m на матрицю розміром mxn з використанням lambda-функції.
Вказівка: використати функцію обчислення скалярного добутку двох векторів та спискоутворення.

T9.4 Скласти функцію для обчислення добутку матриці розміром mxn на матрицю розміром nxk з використанням lambda-функції.
Вказівка: використати функцію обчислення скалярного добутку двох векторів та спискоутворення.

T9.5 Скласти функцію для обчислення суми двох матриць розміром mxn з використанням lambda-функції.
Вказівка: використати спискоутворення.

T9.6 Скласти функції обчислення норм дійсної матриці порядку n з використанням lambda-функції.

а) $\|A\|_1 = \max\limits_{1 \le i \le n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$, б) $\|A\|_2 = \max\limits_{1 \le j \le n} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|$

T9.7 Скласти функцію, що перевіряє чи є задана цілочисельна квадратна матриця магічним квадратом, тобто такою, в якій суми елементів в усіх рядках і стовпчиках однакові. Використати lambda-функцію.
Вказівка: використати функцію zip() для отримання транспонованої матриці.