4. ЧИСЛОВІ ТИПИ ДАНИХ

4.1 Арифметика наближених обчислень

5.1. Обчислити значення функції *round*
а) *round*(35.774873, 5, 10);
б) *round*(0.0000237927, 4, 10);
в) *round*($(110.0100110)_2$, 7, 2);
г) *round*($(3.77673)_8$, 3, 8);
д) *round*(1345271, 4, 10);
е) *round*($(21.4322)_5$, 3, 5).

5.2. Підібрати приклади, що показують порушення співвідношень
а) $x +_p (y +_p z)=(x +_p y) +_p z;$
б) $x *_p (y *_p z)=(x *_p y) *_p z;$
в) $x *_p (y +_p z)=x *_p y +_p x *_p z$
при p=8.
<u>Відповідь</u>
а) x=11111113., y=-111111., z =7.5111111.;

5.3. Вкажіть x такий, що $(x +_p x) /_p 2 <> x$ при p=8.

5.4. Чи виконується рівність $x /_p y=x *_p (1 /_p y)$ для всіх дійсних чисел?

5.5. Доведіть або спростуйте співвідношення
а) $0 -_p (0 -_p x)=x;$
b) $1 /_p (1 /_p x)=x$.

5.6. Чи вірно, що $u <= (u +_p v) /_p 2 <= v$ при $u <= v$?
<u>Розв`язок</u>. В звичайній арифметиці при $u <= v$ справедлива нерівність

$$u=\frac{1}{2}(u+u) <= \frac{1}{2}(u+v) <= \frac{1}{2}(v+v)=v.$$

В арифметиці наближених обчислень $x=(x +_p x) /_p 2$ справедливе не завжди, що призводить до порушення нерівностей
$u <= (u +_p v) /_p 2 <= v$ при $u <= v$.
Достатньо взяти (p=8) u=9.2222222, v=9.2222223 .

5.7. Нехай p=4. Послідовність a_n (n>=1) задана співвідношенням a_1=1000, a_n=0.5 (n>=2). Скласти програму обчислення суми $a_1 + a_2 + ... + a_n$ з точністю ε=1.

5.8. Нехай p=4. Послідовність $a_i (i \geq 1)$ задана співвідношенням a_i=5000+i. Скласти програму обчислення середнього арифметичного $\frac{1}{n}(a_1+...+a_n)$ з точністю ε=1.

5.9. Розв`язати квадратне рівняння $ax^2+bx+c=0$, використовуючи наближені обчислення з чотирма ($p$=4) і шістьма ($p$=6) значущими цифрами. Порівняти отримані корені один з одним і з точним розв`язком. Знайти спосіб обчислення і скласти програму, що дає результат з відносною похибкою δ.

<u>Вказівка</u>: Скористатися теоремою Вієта.

5.10. Якщо в системі рівнянь

$$\begin{cases} x + \sqrt{2}y = \sqrt{3} \\ \sqrt{2}x + 2y = \sqrt{6} \end{cases}.$$

замінити радикали їх наближеннями, то що можна сказати про розв`язок отриманої системи методом Крамера? Що вийде, якщо збільшити точність наближення радикалів?

4.2 Цілий тип даних

5.11. Скласти програму обчисення найбільшого спільного дільника
а) двох натуральних чисел;
б) двох цілих чисел
за допомогою метода Евкліда.

5.12. Скласти програму обчислення найменшого спільного кратного двох натуральних чисел m і n

5.13. Дано натуральні числа m і n. Знайти такі натуральні числа p і q, не виключаючи спільних дільників, що $p/q = m/n$.

5.14. Знайти всі прості нескоротні дроби, що містяться між 0 і 1, знаменники яких не перевищують 7 (дріб задається двома числами-чисельником та знаменником).

5.15. Дано натуральне число n. Скласти програму знаходження всіх таких натуральних q, що n ділиться на q^2 і не ділиться на q^3.

5.16. Дано натуральні числа m і n. Скласти програму знаходження всіх їх натуральних спільних кратних , менших добутка $m*n$.

5.17. Дано натуральні числа *m* і *n.* Скласти програму знаходження всіх їх спільних дільників.

5.18. Два натуральних числа називаються дружніми, якщо кожне з них дорівнює сумі всіх дільників іншого, крім самого цього числа. Скласти програму знаходження всіх пар дружніх чисел, що лежать в діапазоні від 200 до 300.

5.19. Дано натуральне число *n*. Скласти програму знаходження всіх піфагорових трійок натуральних чисел, кожне з яких не перевищує *n*, тобто всіх таких трійок натуральних чисел *a, b, c*, що $a^2 + b^2 = c^2 \ (a <= b <= c <= n)$.

5.20. Натуральне число з *n* цифр є числом Армстронга, якщо сума його цифр, піднесених до *n*-того степеня, дорівнює самому числу (наприклад, $153 = 1^3 + 3^3 + 5^3$). Скласти програму знаходження всіх чисел Армстронга, що складаються з двох, трьох та чотирьох цифр.

5.21. Дано натуральне число *n*. Скласти програму, що визначає, чи можна подати його у вигляді суми двох квадратів натуральних чисел. Якщо це можливо, то

а) вказати пару *a, b* таких натуральних чисел , що $n = a^2 + b^2$;

б) вказати пару *a, b* таких натуральних чисел , що $n = a^2 + b^2, a >= b$.

5.22. Дано натуральне число *n*. Скласти програму,що дозволяє

а) переставити першу та останню цифри числа *n*;

б) приписати по одиниці в початок та кінець запису числа *n*;

в) одержати суму *m* останніх цифр числа *n*.

5.23. Дано натуральне число *n*. Скласти програму, що визначає серед чисел 1, ..., *n* всі такі, запис яких співпадає з останніми цифрами запису їх квадратів (наприклад, $6^2 = 36, \ 25^2 = 625$ і т.д.).

5.24. Назвемо натуральне число паліндромом , якщо його запис читається однаково зліва направо і справа наліво (наприклад, 1, 393, 4884). Скласти програму, що визначає, чи є задане натуральне число *n* паліндромом.

5.25. Дано натуральне число *n*. Скласти програму знаходження всіх менших *n* натуральних чисел

а) які при піднесенні до квадрату дають паліндром;

б) паліндромів, які при піднесенні до квадрату дають також паліндром.

5.26. Задані натуральне число n, цілі числа $a, x_1, \ldots, x_n$. Скласти програму визначення номера члена послідовності, який дорівнює a. Якщо такого немає, то відповіддю має бути число 0.

5.27. Задані натуральне число n, цілі числа $a, x_1, \ldots, x_n$. Якщо в послідовності $x_1, \ldots, x_n$ є хоча б один член, що дорівнює a, то отримати суму всіх членів, які слідують за таким членом послідовності, в протилежному випадку відповіддю має бути відповідне текстове повідомлення.

5.28. Задані натуральне число n, цілі числа $a_1, \ldots, a_n$. Отримати суму додатніх, кількість від'ємних і число нульових членів послідовності $a_1, \ldots, a_n$.

5.29. Задані натуральні числа n і p, цілі числа $a_1, \ldots, a_n$. Скласти програму обчислення добутку членів послідовності, кратних p.

5.30. Дано натуральне число n. Скласти програму, яка з`ясовує, чи можна подати $n!$ у вигляді добутку трьох послідовних чисел.

4.3 Дійсний тип даних

5.31. Задані рекурентні співвідношення

$$a_0 = 1, c_0 = 1 - x,$$

$$a_i = a_{i-1} * (c_{i-1} + 1), c_i = c_{i-1}^2, i = 1,2,\ldots$$

Довести, що $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{x}, \ (0 < x < 2)$ та скласти програму обчислення величини $\frac{1}{x}$, що не використовує операцію ділення

Вказівка. Скористатись співвідношеннями $c_n = c_0^{2^n}$ і $a_n = \frac{1 - c_n}{x}$,

останнє з яких одержується з рівностей

$$a_n = (1 + c_{n-1}) * \ldots * (1 + c_1) * (1 + c_0), \quad \frac{1 + c_{i-1}}{1 - c_i} = \frac{1}{1 - c_{i-1}}$$

5.32. Скласти програму наближеного обчислення квадратного кореня $\sqrt{x}$, використовуючи рекурентні співвідношення

$$a_0 = x, c_0 = 1 - x,$$

$$a_i = a_{i-1} * (1 + \frac{1}{2} * c_{i-1}), \ c_i = \frac{1}{4} * c_{i-1}^2 * (3 + c_{i-1}), i = 1, 2, \ldots$$

та границю $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sqrt{x} \ (0 < x < 2)$.

Вказівка. Використовуючи рівності

$$a_n = (1 + \frac{1}{2} * c_{n-1}) * (1 + \frac{1}{2} * c_{n-2}) * \ldots * (1 + \frac{1}{2} * c_0) * x,$$

$$1 + \frac{1}{2} * c_{i-1} = \frac{\sqrt{1 - c_i}}{\sqrt{1 - c_{i-1}}}$$

довести, що $a_n = \sqrt{x * (1 - c_n)}$.

5.33. Скласти програму наближеного обчислення квадатного кореня $\sqrt{x}$ з заданою точністю, використовуючи рекурентні співвідношення

$$a_0 = \frac{x}{2},$$

$$a_i = \frac{1}{2} * (a_{i-1} + \frac{x}{a_{i-1}}), i = 1,2,...$$

та границю $\lim\limits_{i\to\infty} a_n = \sqrt{x}$.

*Вказівка.*Скористатися рівністю

$$a_n - \sqrt{x} = \frac{1}{2 * a_{n-1}} * \left(a_{n-1} - \sqrt{x}\right)^2$$

.

5.34. Користуючись розкладом в ряд Тейлора, скласти програми обчислення функцій

а) $y = sin(x)$, б) $y = cos(x)$

з заданою точністю.

5.35. Скласти програму обчислення інтегралу

$$\int_0^x e^{-x^2} dx = x - \frac{x^3}{3 \cdot 1!} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \ldots$$

з заданою точністю.

5.36. Скласти програму наближеного обчислення кубічного кореня $\sqrt[3]{x}$, користуючись рекурентним співвідношенням

$$a_0 = 1, a_i = \sqrt[4]{x \cdot a_{i-1}}, i = 1,2,...$$

та границею $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sqrt[3]{x}$.

Вказівка. Скористатись нерівністю

$\left|a_n - \sqrt[3]{x}\right| < \left|a_1 - a_0\right| * \dfrac{q^n}{1-q}$, де $q = \dfrac{1}{n}$.

5.37. Скласти програму наближеного обчислення числа π, використовуючи добуток

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} * \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} * \sqrt{\frac{1}{2}}} * \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} * \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} * \sqrt{\frac{1}{2}}}} * \ldots$$

5.38. Скласти програму наближеного обчислення золотого перетину с, використовуючи границю

$$c = \lim_{n\to\infty} \frac{F_n}{F_{n-1}},$$

де F_n-числа Фібоначчі.

Вказівка. Розглянути послідовність $c_n = \dfrac{F_n}{F_{n-1}}$ та знайти рекурентне співвідношення для c_n.

5.39. Скласти програму обчислення з заданою точністю границь послідовностей, утворених за законами:

а) $a_n = \dfrac{n}{\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1}}$;

б) $a_n = \left(1 - \dfrac{1}{2}\right) * \left(1 - \dfrac{1}{3}\right) * \ldots * \left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right)$;

в) $a_n = \left(1 - \dfrac{1}{2!}\right) * \left(1 + \dfrac{1}{3!}\right) * \ldots * \left(1 + \dfrac{(-1)^n}{(n+1)!}\right)$.

5.40. Скласти програму наближеного обчислення кореня п’ятого степеню $\sqrt[5]{x}$, використовуючи рекурентні співвідношення

$$a_o = \begin{cases} \min(2x, 0.95), \text{ при } x <= 1 \\ \frac{x}{5}, \text{ при } 1 < x < 25 \\ \frac{x}{25}, \text{ у інших випадках} \end{cases}, \quad a_i = \frac{4}{5} * a_{i-1} + \frac{x}{5 * a_{i-1}^4}, \; i = 1, 2, \ldots$$

і границю $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sqrt[5]{x}\,(x > 0)$. Для першого члена a_i, що задовольняє умові $\frac{5}{4} x |a_{i+1} - a_i| < \varepsilon$,

обчислити різницю $x - a_i^5$.

5.41. Скласти програму наближеного обчислення границі послідовності, заданої рекурентним співвідношенням

$$\text{а) } a_0 = 0, a_i = \frac{a_{i-1} + 1}{a_{i-1} + 2}, i = 1,2\ldots; \text{ б) } a_0 = 1, a_i = \frac{2 - a_{i-1}^3}{5}, i = 1,2,\ldots$$

з заданою точністю.

5.42. Задане дійсне число *x*. Послідовність $a_1, a_2, \ldots$ утворена за наступним законом: $a_1 = x$; далі для $i = 2,3\ldots$ виконано :

$$\text{а) } a_i = \sqrt{\left|4 \cdot a_{i-1}^2 - 2x\right|}; \quad \text{б) } a_i = \frac{16 + x}{1 + \left|a_{i-1}^3\right|},$$

$$\text{в) } a_i = 2 \cdot a_{i-1} + \frac{x}{4 + a_{i-1}^2}, \quad \text{г) } a_i = 3 + \frac{1}{2^i} \cos^2(a_{i-1} - x).$$

Скласти програму для обчислення границі послідовності a_n з заданою точністю.

5.43. Задані рекурентні співвідношення

$$x_1 = a, y_1 = b,$$

$$x_i = \frac{1}{2}(x_{i-1} + y_{i-1}), \; y_i = \sqrt{x_{i-1} \cdot y_{i-1}}, \; i = 2,3\ldots\,(a > b > 0)$$

Скласти програму для обчислення першого члена послідовності x_i такого, що $|x_i - y_i| < \varepsilon$, $(\varepsilon > 0)$.

5.44. Скласти програму наближеного обчислення числа π за формулою Грегорі

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$$

5.45. Дано *n* дійсних чисел. Скласти програму для знаходження номера того з них, яке найбільш близьке до цілого числа.

5.46. Задані дійсні числа *x,y* (*x*>0, *y*>1). Скласти програму для обчислення цілого числа *k* (додатнього, відємного або рівного нулеві), що задовольняє умові $y^{k-1} \le x < y^k$.

5.47. Задана послідовність дійсних чисел $x_1, x_2, \ldots x_n$ (*n* заздалегідь невідоме), за якою слідує 0. Скласти програму для обчислення суми
$y = n \cdot x_1 + (n-1) \cdot x_2 + \ldots + 2 \cdot x_{n-1} + x_n$.

5.48. Задана послідовність з *n* дійсних чисел $x_1, x_2, \ldots x_n$ (*n*>=3). Скласти програму для обчислення

а) $(x_1 + 2 \cdot x_2 + x_3) \cdot (x_2 + 2 \cdot x_3 + x_4) \cdot \ldots \cdot (x_{n-2} + 2 \cdot x_{n-1} + x_n)$;

б) $(x_1 + x_2 + x_3) \cdot x_2 + (x_2 + x_3 + x_4) \cdot x_3 + \ldots + (x_{n-2} + x_{n-1} + x_n) \cdot x_{n-1}$

5.49. Задані натуральне число *n*, дійсні числа $a_1, \ldots, a_n$. Скласти програму, що визначає у послідовності $a_1, \ldots, a_n$ кількість сусідств
а) двох додатніх чисел ; б) двох чисел різних знаків.

5.50. Скласти програму обчислення суми

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + \frac{1}{9999} - \frac{1}{10000}$$

наступними чотирма способами:
а) послідовно зліва направо;
б) послідовно зліва направо обчислюється окремо сума додатніх та сума від’ємних доданків, потім ці суми складаються;
в) послідовно справа наліво;
г) послідовно справа наліво обчислюється окремо сума додатніх та сума від’ємних доданків, потім ці суми складаються.
Порівняти результат із даним значенням суми (30 десяткових знаків).

0.693097183059945296917232371458...

Який спосіб дає найменшу похибку обчислень і чому?

4.4 Комплексний тип даних

7.18. Визначити програми для обчислення
а) аргументу;
б) модуля комплексного числа.

7.22. Скласти програму обчислення коренів квадратного рівняння з заданими комплексними коефіцієнтами.

7.23. Скласти програму обчислення значень квадратного тричлена з комплексними коефіцієнтами в заданій комплексній точці.

7.24. Скласти програми обчислення суми всіх доданків, модуль яких не менше ε > 0, у комплексній точці *z*.

а) $e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots;$

б) $sh\ z = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \ldots + \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots;$

в) $ch\ z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots + \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots;$

г) $\sin\ z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots;$

д) $\cos\ z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots;$

е) $\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \ldots + (-1)^n \frac{z^n}{n} + \ldots \quad (|z| < 1);$

є) $arctg\ z = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1} + \ldots \quad (|z| < 1);$