Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Застосування методу відокремлення змінних для розв’язання одновимірних задач

Навчально-методичний посібник
з дисципліни
“Рівняння математичної фізики”

Київ – 2006

Рецензенти:
д-р фіз.-мат. наук, проф. А.Г. Нікітін
канд. фіз.-мат. наук, доц. О.В. Капустян

Рекомендовано до друку вченою радою механіко-математичного факультету
(протокол № 2 від 9 жовтня 2006 року)

Застосування методу відокремлення змінних для розв'язання одновимірних задач: Навчально-методичний посібник з дисципліни "Рівняння математичної фізики". / Упорядники І.Б. Романенко, В.Г. Самойленко. – К.: Видавничо-поліграфічний центр "Київський Університет", 2006. – 54 с.

Наведено матеріал з теми "Задача Штурма-Ліувілля". Розглянуто алгоритм застосування методу відокремлення змінних для задач про вільні коливання струни, вимушені коливання струни, досліджено випадок резонансу, вказано шлях застосування методу відокремлення змінних у випадку задач з неоднорідними крайовими умовами. Розглянуто застосування методу відокремлення змінних до розв'язання задачі теплообміну усередині тонкого однорідного стрижня. Запропоновано задачі для розв'язання під час аудиторних занять і самостійної роботи студентів.

Для студентів механіко-математичного факультету.

§ 1. Задача Штурма-Ліувілля

У процесі застосування методу відокремлення змінних важливу роль відіграють задачі на відшукання власних значень та власних функцій диференціального оператора. До таких задач, зокрема, відноситься задача Штурма-Ліувілля.

Нехай $[a,b]$ — відрізок дійсної осі. Розглянемо диференціальний оператор L від функції одної змінної:

$$Lu = -(p(x)u'(x))' + q(x)u(x)\,, \tag{1}$$

де $p \in C^1([a,b])$, $q \in C([a,b])$, $p(x) > 0$, $x \in [a,b]$. Відносно функції $u(x)$ будемо вимагати, щоб

$$u \in C^2(a,b) \bigcap C^1([a,b])\,. \tag{2}$$

Означення. Нехай $\rho(x)$ — визначена на $[a,b]$ неперервна додатна функція, A_1, A_2, B_1, B_2 — невід'ємні числа, такі, що $A_i + B_i > 0$, $i = 1,2$. Задачею Штурма-Ліувілля для оператора (1) назвемо задачу про відшукання таких чисел λ та таких функцій $u(x)$, при яких задача

$$Lu = -(p(x)u'(x))' + q(x)u(x) = \lambda\rho(x)u(x)\,,\ x \in (a,b)\,, \tag{3}$$

$$A_1 u(a) - B_1 u'(a) = 0\,, \tag{4}$$

$$A_2 u(b) + B_2 u'(b) = 0 \tag{5}$$

має нетривіальний (ненульовий) розв'язок $u \in C^2(a,b) \bigcap C^1([a,b])$. При цьому числа λ, для яких задача (3) — (5) має розв'язок, називають власними значеннями цієї задачі, а функції $u(x)$, відповідні таким числам — власними функціями задачі (3) — (5).

Наведемо основні властивості власних значень та власних функцій задачі Штурма-Ліувілля:

1. Всі власні значення задачі (3) — (5) дійсні, і при $q(x) \geq 0$ — невід'ємні. Множина власних значень задачі (3) — (5) зліченна, причому
$$\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \ldots; \qquad \lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty\,.$$
2. Кожному власному значенню λ відповідає лише одна власна функція $u(x)$.
3. Власні функції задачі (3) — (5), що відповідають різним власним значенням, ортогональні з вагою $\rho(x)$, тобто якщо $u_k(x)$ — функція, відповідна значенню λ_k, а $u_n(x)$ відповідає значенню λ_n ($\lambda_k \neq \lambda_n$), то

$$\int_a^b \rho(x)u_k(x)u_n(x)dx = 0\ .$$

4. Справедлива теорема Стєклова: Якщо функція $f \in C^2([a,b])$ та задовольняє крайові умови (4), (5), то її можна єдиним чином розвинути у рівномірно та абсолютно збіжний ряд Фур'є за власними функціями задачі (3) – (5):

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k u_k(x)\ , \tag{6}$$

де

$$\alpha_k = \frac{1}{\|u_k\|^2}\int_a^b \rho(x)f(x)u_k(x)dx\ , \qquad \|u_k\|^2 = \int_a^b \rho(x)u_k^2(x)dx\ .$$

5. У тому випадку, коли $f \in L_2(a,b)$, ряд (6) збігається до $f(x)$ у середньому з вагою $\rho(x)$, тобто

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b \rho(x)\left[f(x) - \sum_{k=1}^{n}\alpha_k u_k(x)\right]^2 dx = 0\ .$$

Для задачі (3) – (5) можна вводити поняття функції Гріна та зводити задачу (3) – (5) до інтегрального рівняння. Оскільки цей матеріал не має прямого відношення до теми методичного посібника, то його винесено у додаток 1.

Розглянемо кілька прикладів найпростіших задач Штурма-Ліувілля, які виникатимуть під час розв'язання типових прикладів з даного посібника.

Приклад 1.

Розв'язати задачу Штурма-Ліувілля

$$u'' + \lambda u = 0\ ,\ x \in (0,l)\ ,\ u(0) = u(l) = 0\ .$$

Розв'язання. Використовуючи властивість розв'язків задачі Штурма-Ліувілля, можна було б одразу шукати розв'язки цієї задачі за умови $\lambda \ge 0$. Однак для того, щоб продемонструвати повністю процес розв'язання, у даному прикладі властивостей власних значень та власних функцій задачі Штурма-Ліувілля враховувати не будемо.

Проаналізуємо розв'язність досліджуваної задачі при різних за знаком значеннях параметра λ. Розглянемо спочатку випадок $\lambda < 0$. У цьому випадку загальний розв'язок рівняння $u'' + \lambda u = 0$ має вигляд

$$u(x) = Ae^{\sqrt{-\lambda}x} + Be^{-\sqrt{-\lambda}x}\ ,$$

де A, B – довільні сталі. Підставляючи цей розв'язок у крайові умови задачі, отримуємо систему рівнянь

$$A + B = 0\ ,$$

$$Ae^{\sqrt{-\lambda}l} + Be^{-\sqrt{-\lambda}l} = 0 .$$

По відношенню до невідомих A, B ця система є лінійною однорідною системою рівнянь з ненульовим детермінантом, а отже — має лише тривіальний розв'язок. Таким чином, у випадку $\lambda < 0$ задача Штурма-Ліувілля з нашого прикладу розв'язків не матиме.

Повністю аналогічно можна переконатись, що не буде нетривіальних розв'язків і у випадку $\lambda = 0$, коли загальний розв'язок рівняння $u'' + \lambda u = 0$ має вигляд $u(x) = Ax + B$.

Нарешті, у випадку $\lambda > 0$ вигляд загального розв'язку рівняння задачі буде

$$u(x) = A\cos\sqrt{\lambda}x + B\sin\sqrt{\lambda}x .$$

Підстановка знайденого загального розв'язку у ліву крайову умову дає рівність $A = 0$, враховуючи яку, з підстановки у праву крайову умову, маємо

$$B\sin\sqrt{\lambda}l = 0 .$$

Оскільки у постановці задачі Штурма-Ліувілля мова йде про знаходження нетривіальних розв'язків, то виконання останньої рівності не можна вимагати за рахунок умови $B = 0$, але можна дослідити, при яких значеннях λ може бути виконана рівність

$$\sin\sqrt{\lambda}l = 0 .$$

Розв'язання останнього рівняння за умови $\lambda > 0$ дає корені $\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2$, $k \geq 1$ (власні значення), яким відповідають власні функції вигляду $u_k(x) = \sin\frac{k\pi x}{l}$, $k \geq 0$. Як можна помітити з попереднього розв'язання, власні функції можна визначити з точністю до ненульової сталої, у даному випадку ми взяли значення цієї сталої рівною 1.

Приклад 2.

Розв'язати задачу Штурма-Ліувілля

$$u'' + \lambda u = 0 ,\ x \in (0, l) ,\ u(0) = u'(l) = 0 .$$

Розв'язання. Аналізуючи, як і у прикладі 1, випадки $\lambda < 0$ та $\lambda = 0$, можемо переконатись, що у цих випадках задача Штурма-Ліувілля має лише тривіальний розв'язок. У випадку $\lambda > 0$ загальний розв'язок рівняння $u'' + \lambda u = 0$ має вигляд

$$u(x) = A\cos\sqrt{\lambda}x + B\sin\sqrt{\lambda}x .$$

Підстановка цього розв'язку відповідно у ліву та праву крайові умови дає рівність $A = 0$ та рівняння $\cos\sqrt{\lambda}l = 0$. Звідси визначаємо власні значення задачі Штурма-Ліувілля згідно формули $\lambda = \left(\frac{k\pi}{l} + \frac{\pi}{2l} \right)^2$, $k \ge 0$. Тоді відповідні їм власні функції мають вигляд $u_k(x) = \sin\left(\frac{k\pi}{l} + \frac{\pi}{2l} \right) x$, $k \ge 0$.

Приклад 3.

Розв'язати задачу Штурма-Ліувілля

$$u'' + \lambda u = 0, \; x \in (0, l), \; u'(0) = u(l) = 0.$$

Розв'язання. Аналізуючи, як і у прикладі 1, випадки $\lambda < 0$ та $\lambda = 0$, можемо переконатись, що у цих випадках задача Штурма-Ліувілля має лише тривіальний розв'язок. У випадку $\lambda > 0$ загальний розв'язок рівняння $u'' + \lambda u = 0$ має вигляд

$$u(x) = A \cos \sqrt{\lambda} x + B \sin \sqrt{\lambda} x.$$

Підстановка цього розв'язку відповідно у ліву та праву крайові умови дає рівність $B = 0$ та рівняння $\cos \sqrt{\lambda} l = 0$. Звідси визначаємо власні значення задачі Штурма-Ліувілля згідно формули $\lambda = \left(\frac{k\pi}{l} + \frac{\pi}{2l} \right)^2$, $k \ge 0$. Тоді відповідні їм власні функції мають вигляд $u_k(x) = \cos\left(\frac{k\pi}{l} + \frac{\pi}{2l} \right) x$, $k \ge 0$.

Приклад 4.

Розв'язати задачу Штурма-Ліувілля

$$u'' + \lambda u = 0, \; x \in (0, l), \; u'(0) = u'(l) = 0.$$

Розв'язання. Аналізуючи, як і у прикладі 1, випадок $\lambda < 0$, можемо переконатись, що у цьому випадку задача Штурма-Ліувілля має лише тривіальний розв'язок. Нескладно переконатись, що у випадку $\lambda = 0$ задача Штурма-Ліувілля має нетривіальний розв'язок $u_0(x) = 1$. У випадку $\lambda > 0$ загальний розв'язок рівняння $u'' + \lambda u = 0$ має вигляд

$$u(x) = A \cos \sqrt{\lambda} x + B \sin \sqrt{\lambda} x.$$

Підстановка цього розв'язку відповідно у ліву та праву крайові умови дає рівність $B = 0$ та рівняння $\sin \sqrt{\lambda} l = 0$. Звідси визначаємо власні значення згідно формули $\lambda = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2$, $k \ge 1$. Тоді відповідні їм власні функції мають вигляд $u_k(x) = \cos\frac{k\pi}{l}x$, $k \ge 1$.

Підсумовуючи, можна сказати, що дана задача Штурма-Ліувілля має власні числа $\lambda = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2$, $k \ge 0$, а відповідні їм власні функції мають вигляд $u_k(x) = \cos\frac{k\pi}{l}x$, $k \ge 0$.

Приклад 5.

Розв'язати задачу Штурма-Ліувілля

$$u'' + \lambda u = 0\,,\ x \in (0, l)\,,\ u'(0) = u(l) + u'(l) = 0\,.$$

Розв'язання. Аналіз випадків $\lambda \le 0$, дозволяє зробити висновок, що при вказаних обмеженнях на λ задача має лише тривіальний розв'язок. Розглянемо випадок $\lambda > 0$. Як і в попередніх прикладах, загальний розв'язок рівняння $u'' + \lambda u = 0$ у цьому випадку має вигляд

$$u(x) = A\cos\sqrt{\lambda}x + B\sin\sqrt{\lambda}x\,.$$

Підстановка цього розв'язку у ліву крайову умову дає рівність $B = 0$. Враховуючи це, а також той факт, що ми шукаємо нетривіальні розв'язки задачі, у результаті підстановки розв'язку у праву крайову умову отримаємо

$$\cos\sqrt{\lambda}l - \sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}l = 0\,,$$

звідки дістаємо рівняння

$$\sqrt{\lambda} = \operatorname{ctg}\sqrt{\lambda}l\,. \qquad (7)$$

Останнє рівняння є трансцендентним і його розв'язки не можуть бути записані в явному вигляді. Зауважимо, що заміною $\mu = \sqrt{\lambda}$ це рівняння може бути зведено до рівняння

$$\mu = \operatorname{ctg}\mu l\,, \qquad (8)$$

додатні розв'язки якого є x-координатами точок перетину графіків функцій $y = x$ та $y = \operatorname{ctg} lx$ у правій півплощині. Аналіз поведінки вказаних функцій дозволяє зробити висновок, що таких точок перетину буде зліченна кількість. Позначимо за допомогою μ_k, $k \ge 1$, корені рівняння (8). Тоді розв'язки рівняння (7) мають вигляд $\lambda_k = \mu_k^2$, $k \ge 1$. Відповідні власні функції мають вигляд $u_k(x) = \cos\mu_k x$, $k \ge 1$.

Зауважимо, що хоча у даному випадку не вдалося записати розв'язки рівняння (8), а отже і розв'язки рівняння (7) у явному вигляді за допомогою аналітичної формули, однак за допомогою сучасних чисельних методів ці розв'язки нескладно знаходити з високою точністю.

§ 2. Застосування методу відокремлення змінних для задачі про вільні коливання струни

Розглянемо застосування методу відокремленнях змінних до задачі

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \; x \in (0,l), \; t > 0, \tag{9}$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \; t \ge 0, \tag{10}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \; \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x), \; x \in [0,l]. \tag{11}$$

Розв'язок задачі (9) ─ (11) шукатимемо у вигляді ряду

$$u(x,t) = \sum_n X_n(x) T_n(t). \tag{12}$$

У кожному доданку ряду (12) функції $X_k(x)$ та $T_k(t)$ відповідно залежать лише від змінної x або лише від змінної t. Кількість та вигляд доданків ряду (12) буде визначено у процесі розв'язання задачі (9) ─ (11).

Від кожного окремого доданку $X_k(x)T_k(t)$ ряду (12) будемо вимагати виконання рівняння (9) та крайових умов (10). Отож визначимо, якою може бути функція $X(x)T(t)$, яка має задовольняти рівняння (9) та умов (10).

Підстановка функції $X(x)T(t)$ у рівняння (9) дає співвідношення

$$XT'' = a^2 X'' T,$$

звідки отримуємо

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{a^2 T}. \tag{13}$$

В останньому рівнянні в лівій частині рівності знаходиться функція, залежна лише від x, а в правій ─ залежна лише від t (іншими словами, для рівняння (9) можна відокремити змінні). Саме тому рівність (13) можлива лише у тому випадку, коли вирази у лівій та правій частинах будуть тотожно дорівнювати деякій сталій (традиційно цю сталу позначають за допомогою $-\lambda$). Отже, з (13) маємо

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{a^2 T} = -\lambda. \tag{14}$$

З іншого боку, вимога виконання для функції вигляду $X(x)T(t)$ крайових умов (10) призводить до рівності

$$X(0)T(t) = X(l)T(t) = 0,$$

виконання якої за умов нетривіальності функції $X(x)T(t)$ може бути забезпечено за виконання умов

$$X(0) = X(l) = 0. \qquad (15)$$

Зі співвідношень (14), (15) для функції $X(x)$ дістаємо задачу

$$X'' + \lambda X = 0,\ x \in (0,l),\quad X(0) = X(l) = 0, \qquad (16)$$

яка є задачею Штурма-Ліувілля, розглянутою у прикладі 1. Згідно з прикладом 1, розв'язки задачі (16) мають вигляд

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2,\quad X_n(x) = \sin\frac{n\pi}{l}x,\ \ n \geq 1. \qquad (17)$$

Користуючись формулою розв'язку (17) та співвідношенням (14), встановлюємо, що для функцій $T_n(t)$ для кожного фіксованого $n \geq 1$ справедливе рівняння:

$$T_n^{//} + \left(\frac{n\pi\, a}{l}\right)^2 T_n = 0,$$

звідки маємо для кожного $n \geq 1$

$$T_n(t) = A_n \cos\frac{n\pi a}{l}t + B_n \sin\frac{n\pi a}{l}t. \qquad (18)$$

Таким чином, ряд (12), за допомогою якого ми шукаємо розв'язок задачі (9) — (11), набуває більш конкретизованого вигляду:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos\frac{n\pi a}{l}t + B_n \sin\frac{n\pi a}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x. \qquad (19)$$

Значення коефіцієнтів A_n та B_n у формулі (19) визначимо, взявши до уваги початкові умови (11). Справді, підстановка ряду (19) у першу з початкових умов (11) призводить до рівності

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi}{l}x = \varphi(x),\ \ x \in [0,l]. \qquad (20)$$

Використовуючи властивість ортогональності власних функцій задачі Штурма-Ліувілля (властивість 3 з § 1 при $\rho(x) = 1$), коефіцієнти A_n можемо шукати, помноживши ліву та праву частину рівності (20) на функцію вигляду $\sin\frac{k\pi}{l}x$ та проінтегрувавши по проміжку $(0,l)$. Внаслідок ортогональності власних функцій задачі (16), після такої операції від нескінченної суми у лівій частині залишиться лише один доданок, а саме той, де $n = k$ (при цьому при інтегруванні утворюється множник $\int_0^l \sin^2 \frac{k\pi}{l} x \, dx = \frac{l}{2}$). Отже, дістаємо рівність

$$A_k \frac{l}{2} = \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{k\pi}{l} x \, dx,$$

звідки

$$A_k = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{k\pi}{l} x \, dx, \; k \geq 1. \qquad (21)$$

Повністю аналогічно, підстановка ряду (19) у другу з початкових умов (11) призводить до рівності

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{an\pi}{l} \sin \frac{n\pi}{l} x = \psi(x), \; x \in [0, l]. \qquad (22)$$

Помноження лівої та правої частин рівності (22) на функцію вигляду $\sin \frac{k\pi}{l} x$ та подальше інтегрування отриманої рівності по проміжку $(0, l)$ з метою утворення скалярних добутків в силу ортогональності системи власних функцій задачі Штурма-Ліувілля призводить до рівності

$$B_k = \frac{2}{ak\pi} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{k\pi}{l} x \, dx, \; k \geq 1. \qquad (23)$$

Отже, в результаті можемо зробити такий висновок: Ряд (19), в якому коефіцієнти A_n та B_n можна знайти за формулами (21), (23), внаслідок процедури побудови формально задовольняє рівняння (9) та умови (10), (11). Тому, якщо встановити, що такий ряд можна диференціювати потрібну кількість разів, то можна стверджувати, що ряд (19) є розв'язком задачі (9) ─ (11).

Обґрунтування розглянутого методу наведено у літературі з рівнянь математичної фізики, наприклад, в [12]. Тому у межах даного методичного посібника ми не будемо детально зупинятись на цьому питанні. Зауважимо лише, що при застосуванні наведеного методу умовами збіжності ряду типу (19) є диференційованість до потрібного порядку функцій у початкових умовах задачі та узгодженість між собою її крайових та початкових умов.

Таким чином, можна стверджувати, що за допомогою методу відокремлення змінних розв'язок задачі (9) ─ (11) може бути записано у вигляді ряду

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi a}{l} t + B_n \sin \frac{n\pi a}{l} t \right) \sin \frac{n\pi}{l} x, \qquad (19)$$

коефіцієнти якого може бути встановлено за формулами

$$A_k = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{k\pi}{l}x\,dx\,,\ k \geq 1\,, \tag{21}$$

$$B_k = \frac{2}{ak\pi}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{k\pi}{l}x\,dx\,,\ k \geq 1\,. \tag{23}$$

Зауважимо одразу, що для нас більш важливим є розуміння самої суті та етапів застосування методу, аніж формальне засвоєння формул розв’язку. Це пов’язано з тим, що наведені формули є доволі громіздкими і важкими для правильного запам’ятовування; знання ж ідеї методу дозволить застосовувати його і знаходити розв’язки задач, які можуть відрізнятись від розглянутої вище.

Розв’язку задачі (9) — (11), визначено формулою (19), можна дати досить просте та зрозуміле тлумачення у термінах акустики. Кожен доданок ряду (19) можна подати у вигляді

$$u_n(x,t) = \left(A_n \cos\frac{n\pi a}{l}t + B_n \sin\frac{n\pi a}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x =$$

$$= \alpha_n \cos\frac{n\pi a}{l}(t+\delta_n)\sin\frac{n\pi}{l}x\,,$$

де $\alpha_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$, $\delta_n = -\frac{l}{an\pi}\operatorname{arctg}\frac{B_n}{A_n}$.

Така функція моделює коливання точок струни, коли коливання для усіх точок відбувається з однаковою частотою $\omega_n = \frac{n\pi}{a}l$ та фазою, але відмінними амплітудами; амплітуда коливання (з урахуванням знаку) у кожній фіксованій точці x становить $\alpha_n \sin\frac{n\pi}{l}x$. Очевидно, що під час такого коливання розповсюдження хвилі вздовж струни не відбувається, тому коливання отриманого вигляду називають *нерухомою хвилею*. Точки, де амплітуда коливань дорівнює нулю (такі точки визначаються з рівняння $\sin\frac{n\pi}{l}x = 0$), тобто точки вигляду $x = \frac{ml}{n}$, $m = \overline{1, n-1}$ називають *вузлами нерухомої хвилі*. Точки, в яких коливання відбуваються з максимальною амплітудою (їх можна знайти за допомогою рівняння $\sin\frac{n\pi}{l}x = \pm 1$), тобто точки вигляду $x = \frac{2m+1}{2n}l$, $m = \overline{0, n-1}$, називають *точками здимання нерухомої хвилі*.

Таким чином, можна сказати, що звук струни утворюється як накладення «простих тонів», кожен з яких відповідає нерухомій хвилі $u_n(x,t)$. При цьому частота коливань у кожному доданку u_n кратна до частоти коливань у доданку u_1. Виявляється, саме це призводить до сприйняття нами звуку струни як мелодійного (якщо частоти коливань не є кратними, то звук сприймається слухачем як немелодійний шум). Частота $\omega_1 = \frac{\pi}{a} l$ коливань у першому доданку ряду (19) є найнижчою і називається основним тоном струни. Решта тонів, відповідні більш високим частотам, кратним частоті основного тону, називають обертонами. Ці тони визначають темброве забарвлення звуку струни.

Приклад 6.

Розв'язати задачу:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \; x \in (0,\pi), \; t > 0,$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \; t \ge 0,$$

$$u(x,0) = \sin x + 2\sin 3x, \; \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 1, \; x \in [0,\pi].$$

Розв'язання: Як нескладно побачити, дана задача є частинним випадком вже розглянутої вище задачі (9) – (11) при $l = \pi$ та $a = 1$. Тому, можна одразу стверджувати, що згідно з формулою (19) її розв'язок має вигляд

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos nt + B_n \sin nt\right) \sin nx.$$

Знайдемо коефіцієнти A_n та B_n. Підстановка ряду у першу початкову умову дає рівність

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin nx = \sin x + 2\sin 3x,$$

звідки коефіцієнти A_n може бути визначено за допомогою інтегрування, як у формулі (21). Однак зауважимо, що у даному випадку коефіцієнти можна знайти і простіше, якщо помітити, що вираз у правій частині є сумою з доданків того ж типу, що і в лівій частині. Саме тому коефіцієнти A_n у даному випадку можна просто підібрати (тут ми скористались теоремою Стєклова, сформульованою у властивості 4 власних функцій задачі Штурма-Ліувілля з параграфу 1, а саме – єдиністю розкладу у ряд за власними функціями). Маємо:

$$A_1 = 1, \; A_2 = 0, \; A_3 = 2, \; A_n = 0, \; n \ge 4.$$

З другої початкової умови отримуємо рівність

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n n\sin nx=1,$$

звідки коефіцієнти B_n може бути знайдено шляхом інтегрування, так, як у формулі (23):

$$B_n=\frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx=\frac{2}{n\pi}\frac{1-\cos n\pi}{n}=\begin{cases}\frac{4}{n^2\pi},\ n=2k+1,\\ 0,\ n=2k.\end{cases}$$

Отже, відповіддю у прикладі буде ряд

$$u(x,t)=\cos t\sin x+2\cos 3t\sin 3x+$$
$$+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{4\sin(2k+1)t\sin(2k+1)x}{(2k+1)^2\pi}.$$

Приклад 7.

Розв’язати задачу:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-u,\ x\in(0,1),\ t>0,$$

$$u(0,t)=\frac{\partial u}{\partial x}(1,t)=0,\ t\ge 0,$$

$$u(x,0)=x^2-2x,\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0,\ x\in[0,1].$$

Розв’язання: Розв’яжемо задачу методом відокремлення змінних. Розв’язок задачі будемо шукати у вигляді ряду

$$u(x,t)=\sum_n X_n(x)T_n(t).$$

Від кожного окремого доданку $X_n(x)T_n(t)$ ряду (12) будемо вимагати виконання рівняння та крайових умов задачі. Отож визначимо, якою може бути функція $X(x)T(t)$, що задовольняє рівняння та крайові умови.

Підстановка функції $X(x)T(t)$ у рівняння дає співвідношення

$$XT''=X''T-XT,$$

звідки

$$X(T''+T)=X''T,$$

а отже, змінні можна відокремити:

$$\frac{X''}{X}=\frac{T''+T}{T}=-\lambda.$$

Враховуючи крайові умови задачі з даного прикладу, задача Штурма-Ліувілля для функції $X(x)$ набуває вигляду

$$X''+\lambda X = 0,\ x \in (0,1),\quad X(0) = X'(1) = 0\,, \tag{16}$$

яка є частинним випадком задачі Штурма-Ліувілля, розглянутої у прикладі 2. Згідно з прикладом 2, розв'язки цієї задачі мають вигляд

$$\lambda_n = \left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)^2,\ n \ge 0\,,\ X_n(x) = \sin\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)x\,,\ n \ge 0\,.$$

Тоді для функцій $T_n(t)$ при кожному фіксованому $n \ge 0$ справедливе рівняння:

$$T_n^{//} + \left(1 + \frac{\pi^2(2n+1)^2}{4}\right)T_n = 0\,,$$

звідки при кожному $n \ge 0$ знаходимо

$$T_n(t) = A_n \cos t\sqrt{1 + \frac{\pi^2(2n+1)^2}{4}} + B_n \sin t\sqrt{1 + \frac{\pi^2(2n+1)^2}{4}}\,.$$

Таким чином, ряд, за допомогою якого ми шукаємо розв'язок задачі, набуває вигляду:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos t\sqrt{1 + \frac{\pi^2(2n+1)^2}{4}} + \right.$$

$$\left. + B_n \sin t\sqrt{1 + \frac{\pi^2(2n+1)^2}{4}}\right)\sin\frac{(2n+1)\pi}{2}x.$$

Значення коефіцієнтів A_n та B_n визначимо за допомогою підстановки ряду у початкові умови задачі. Врахування початкових умов призводить до рівностей для визначення коефіцієнтів A_n та B_n:

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{(2n+1)\pi}{2}x = x^2 - 2x\,,\ x \in [0,1]\,,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n\sqrt{1 + \frac{\pi^2(2n+1)^2}{4}}\sin\frac{(2n+1)\pi}{2}x = 0\,,\ x \in [0,1]\,.$$

Використовуючи ортогональність власних функцій задачі Штурма-Ліувілля в просторі $L_2(0,1)$, помножимо ліву та праву частини першої рівності на функцію $\sin\frac{(2n+1)\pi}{2}x$, та проінтегруємо по проміжку $(0,1)$. В результаті для коефіцієнтів A_n знаходимо рівності:

$$A_n = 2\int_0^1 (x^2-2x)\sin\frac{(2n+1)\pi}{2}x\,dx =$$

$$= -\frac{4}{(2n+1)\pi}(x^2-2x)\cos\frac{(2n+1)\pi}{2}x\Big|_0^1 +$$

$$+\frac{8}{(2n+1)\pi}\int_0^1 (x-1)\cos\frac{(2n+1)\pi}{2}x\,dx =$$

$$= \frac{16}{(2n+1)^2\pi^2}(x-1)\sin\frac{(2n+1)\pi}{2}x\Big|_0^1 -$$

$$-\frac{16}{(2n+1)^2\pi^2}\int_0^1 \sin\frac{(2n+1)\pi}{2}x\,dx = -\frac{32}{(2n+1)^3\pi^3},\ n\ge 0.$$

З другої рівності для визначення коефіцієнтів A_n, B_n очевидним чином випливає, що $B_n = 0$, $n \ge 0$.

Отже, відповіддю у задачі з даного прикладу є ряд

$$u(x,t) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{32}{(2n+1)^3\pi^3}\cos t\sqrt{1+\frac{\pi^2(2n+1)^2}{4}}\sin\frac{(2n+1)\pi}{2}x.$$

§ 3. Застосування методу відокремлення змінних до задачі про вимушені коливання струни

Розглянемо застосування методу відокремлення змінних до задачі

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t),\ x\in(0,l),\ t>0, \qquad (24)$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0,\ t\ge 0, \qquad (25)$$

$$u(x,0) = \varphi(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x),\ x\in[0,l], \qquad (26)$$

яка моделює процес коливань струни під дією зовнішньої сили, лінійна щільність якої описується функцією $f(x,t)$.

Можна запропонувати такий алгоритм застосування методу відокремлення змінних до задачі (24) — (26):

1. Підставити функцію вигляду $X(x)T(t)$ в однорідне рівняння, що відповідає рівнянню (24). Виконати відокремлення змінних, записати відповідну задачу Штурма-Ліувілля для функції $X(x)$, знайти власні значення та власні функції λ_n, X_n.
2. При знайдених функціях $X_n(x)$ формально підставити ряд $\sum\limits_n X_n(x)T_n(t)$ у рівняння (24). Потім за допомогою помноження на функції $X_n(x)$ та інтегрування по проміжку $(0,l)$, використовуючи властивість ортогональності власних функцій задачі Штурма-Ліувілля, від цього рівняння перейти до звичайного диференціального рівняння для кожного доданку $T_n(t)$. Розв'язати отримані диференціальні рівняння, знайти вигляд функцій $T_n(t)$.
3. Шляхом підстановки отриманого ряду у початкові умови (26) знайти невідомі коефіцієнти та записати явний розв'язок задачі (24) – (26).

Розглянемо даний алгоритм більш детально.

Однорідне рівняння, яке відповідає рівнянню (24), співпадає з рівнянням (9). Зважаючи на те, що крайові умови (25) співпадають з умовами (10), можна стверджувати, що у даному випадку $\lambda_n = \left(\dfrac{n\pi}{l}\right)^2$, а $X_n(x) = \sin\dfrac{n\pi}{l}x$, $n \geq 1$.

Підставимо ряд $u(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin\dfrac{n\pi}{l}x$ у рівняння (24). Маємо

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n^{//} \sin\frac{n\pi}{l}x = -a^2\sum_{n=1}^{\infty} T_n\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \sin\frac{n\pi}{l}x + f(x,t),$$

або

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(T_n^{//} + \left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 T_n\right)\sin\frac{n\pi}{l}x = f(x,t).$$

Враховуючи ортогональність системи власних функцій задачі Штурма-Ліувілля, помножимо праву та ліву частини останньої рівності на $\sin\dfrac{n\pi}{l}x$ та проінтегруємо за x по проміжку $(0,l)$. В результаті отримаємо рівняння

$$T_n^{//} + \left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 T_n = f_n(t),\ t \geq 0,\ k \geq 1,$$

де

$$f_n(t) = \frac{2}{l}\int_0^l f(x,t)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx\,,\ n \ge 1\,. \quad (27)$$

Розв'язуючи ці рівняння за допомогою методів розв'язання звичайних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами (див., наприклад, [20], [21]), можемо записати

$$T_n(t) = A_n\cos\frac{an\pi}{l}t + B_n\sin\frac{an\pi}{l}t + \frac{l}{an\pi}\int_0^t f_k(\tau)\sin\frac{an\pi}{l}(t-\tau)\,d\tau \text{ і},$$

отже, маємо

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{an\pi}{l}t + B_n\sin\frac{an\pi}{l}t + \right.$$
$$\left. + \frac{l}{an\pi}\int_0^t f_n(\tau)\sin\frac{an\pi}{l}(t-\tau)\,d\tau \right)\sin\frac{n\pi}{l}x. \quad (28)$$

Підстановка виразу (28) у початкові умови (26) з урахуванням того факту, що

$$\left.\int_0^t f_n(\tau)\sin\frac{an\pi}{l}(t-\tau)\,d\tau\right|_{t=0} = 0\,,$$

$$\left.\frac{d}{dt}\left(\int_0^t f_n(\tau)\sin\frac{an\pi}{l}(t-\tau)\,d\tau\right)\right|_{t=0} = 0\,,$$

дає рівності

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\sin\frac{n\pi}{l}x = \varphi(x)\,,\ x\in[0,l]\,,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n\frac{an\pi}{l}\sin\frac{n\pi}{l}x = \psi(x)\,,\ x\in[0,l]\,,$$

які співпадають з уже розглянутими рівностями (20), (22). Застосування вже викладеної в попередньому параграфі методики визначення невідомих коефіцієнтів ряду-розкладу за власними функціями дає формули

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx\,,\ n \ge 1\,, \quad (29)$$

$$B_n = \frac{2}{an\pi}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx\,,\ k \ge 1\,. \quad (30)$$

Таким чином, розв'язок задачі (24) — (26) можна подати за допомогою формули (28), в якій коефіцієнти A_n, B_n визначено згідно формул (29), (30), а функції $f_n(t)$ — за формулами (27).

Зауважимо, що розв'язок задачі (24) — (26), поданий за допомогою формули (28), складається з суми розв'язку задачі з однорідним рівнянням та ненульовими початковими умовами, який можна знайти за формулою (19), та розв'язку задачі з неоднорідним рівнянням та однорідними початковими умовами. Останній розв'язок має вигляд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{l}{an\pi} \int_0^t f_n(\tau) \sin \frac{an\pi}{l}(t-\tau)\, d\tau \sin \frac{n\pi}{l} x .$$

Саме тому, у разі потреби, з міркувань зручності розв'язання задачі (24) — (26) процес пошуку її розв'язку можна поділяти на розв'язання задачі з однорідним рівнянням та неоднорідними початковими умовами

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \; x \in (0,l), \; t > 0, \tag{24'}$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \; t \geq 0, \tag{25'}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \; \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x), \; x \in [0,l], \tag{26'}$$

та розв'язання задачі з неоднорідним рівнянням та однорідними початковими умовами

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \; x \in (0,l), \; t > 0, \tag{24''}$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \; t \geq 0, \tag{25''}$$

$$u(x,0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x), \; x \in [0,l]. \tag{26''}$$

При цьому розв'язок задачі (24) — (26) можна знайти як суму розв'язків задач (24') — (26') та (24'') — (26'').

Приклад 8.

Розв'язати задачу:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 1, \; x \in (0,\pi), \; t > 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = u(\pi,t) = 0, \; t \geq 0,$$

$$u(x,0) = \cos\frac{x}{2}, \; \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, \; x \in [0,\pi].$$

Розв'язання: Розв'яжемо задачу методом відокремлення змінних згідно з методикою застосування цього методу для задач з неоднорідними рівняннями. Розв'язок задачі будемо шукати у вигляді ряду

$$u(x,t)=\sum_n X_n(x)\,T_n(t)\,.$$

Знайдемо вигляд функцій $X_n(x)$, скориставшись методом відокремлення змінних для однорідного рівняння, що відповідає рівнянню досліджуваної задачі. В результаті підстановки функції $X(x)T(t)$ в однорідне рівняння отримуємо

$$XT''=X''T\,,\qquad\qquad \frac{X''}{X}=\frac{T''}{T}=-\lambda\,.$$

Враховуючи крайові умови задачі з даного прикладу, задача Штурма-Ліувілля для функції $X(x)$ набуває вигляду

$$X''+\lambda X=0,\ x\in(0,\pi),\quad X'(0)=X(\pi)=0\,,$$

яка є частинним випадком задачі Штурма-Ліувілля, розглянутої у прикладі 3. Згідно з прикладом 3, розв'язки цієї задачі мають вигляд

$$\lambda_n=\left(n+\frac{1}{2}\right)^2,\ n\geq 0\,,\ X_n(x)=\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x\,,\ n\geq 0\,.$$

Підставимо ряд $u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}T_n(t)\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x$ у рівняння задачі. Маємо

$$\sum_{n=0}^{\infty}T_n^{//}\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x=-\sum_{n=0}^{\infty}T_n\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x+1\,,$$

або

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(T_n^{//}+\left(n+\frac{1}{2}\right)^2T_n\right)\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x=1\,.$$

Враховуючи ортогональність системи власних функцій задачі Штурма-Ліувілля, помножимо праву та ліву частини останньої рівності на $\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x$ та проінтегруємо за x по проміжку $(0,\pi)$. В результаті отримаємо рівняння

$$T_n^{//}+\left(n+\frac{1}{2}\right)^2T_n=\frac{4\pi(-1)^n}{2n+1}\,,\ t>0\,,\ n\geq 0\,.$$

Розв'язання цих рівнянь за допомогою методів розв'язання диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами та правою частиною спеціального вигляду дає загальний розв'язок

$$T_n(t)=A_n\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)t+B_n\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t+\frac{16\pi(-1)^n}{(2n+1)^3},\ n\geq 0.$$

Таким чином, ряд, за допомогою якого ми шукаємо розв'язок задачі, набуває вигляду:

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(A_n\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)t+B_n\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t+\right.$$
$$\left.+\frac{16\pi(-1)^n}{(2n+1)^3}\right)\cos\frac{2n+1}{2}x.$$

Підстановка цього ряду у початкові умови призводить до рівностей для визначення коефіцієнтів A_n, B_n:

$$u(x,0)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(A_n+\frac{16\pi(-1)^n}{(2n+1)^3}\right)\cos\frac{2n+1}{2}x=\cos\frac{x}{2},\ x\in(0,1),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\,\frac{2n+1}{2}\cos\frac{(2n+1)}{2}x=0,\ x\in(0,1).$$

Оскільки доданок у правій частині першої рівності є доданком такого ж вигляду, що і в ряді лівої частини рівності, то коефіцієнти A_n можна просто підібрати. Маємо

$$A_0=1-16\pi,\ A_n=\frac{16\pi(-1)^{n+1}}{(2n+1)^3},\ n\geq 1.$$

З другої рівності отримуємо $B_n=0$, $n\geq 1$.

Отже, відповідь у даному прикладі має вигляд

$$u(x,t)=\cos\frac{t}{2}\cos\frac{x}{2}+$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{16\pi(-1)^{n+1}}{(2n+1)^3}\left(\cos\frac{2n+1}{2}t-1\right)\cos\frac{2n+1}{2}x.$$

§ 4. Дослідження явища резонансу під час вимушених коливань струни

Як випливає з акустичного тлумачення розв'язку задачі про вільні коливання струни, даного у параграфі 2, процес вільних коливань струни є композицією нескінченної кількості коливань, частоти яких кратні частоті основного тону.

З іншого боку, відомо, що у випадку, коли коливання відбуваються з участю зовнішньої сили, співпадіння частоти коливань зовнішньої сили з одною з власних частот коливань системи призводить до різкого збільшення амплітуди коливань аж до руйнування об'єкту коливань.

Одною з перевірок відповідності постановки задачі та методів її розв'язання реальним об'єктам та явищам, які вона має описувати, є порівняння результату математичного моделювання та фізичного процесу у тому, коли розвиток процесу можна з тих чи інших міркувань передбачити. Таким випадком для коливань струни є випадок резонансу.

Розглянемо задачу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A\sin\omega t\,,\ x \in (0,l)\,,\ t > 0\,, \qquad (31)$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0\,,\ t \ge 0\,, \qquad (32)$$

$$u(x,0) = 0\,,\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0\,,\ x \in [0,l]\,, \qquad (33)$$

Розв'яжемо цю задачу за допомогою методу відокремлення змінних згідно з методикою застосування цього методу для задач з неоднорідними рівняннями. Розв'язок задачі будемо шукати у вигляді ряду

$$u(x,t) = \sum_n X_n(x)T_n(t)\,.$$

Функції $X_n(x)$ можна визначити, скориставшись методом відокремлення змінних для однорідного рівняння, що відповідає рівнянню досліджуваної задачі. В результаті підстановки функції $X(x)T(t)$ в однорідне рівняння отримуємо

$$XT'' = X''T\,, \qquad \frac{X''}{X} = \frac{T''}{T} = -\lambda\,.$$

Враховуючи крайові умови задачі з даного прикладу, задача Штурма-Ліувілля для функції $X(x)$ набуває вигляду

$$X'' + \lambda X = 0,\ x \in (0,\pi),\quad X(0) = X(l) = 0\,,$$

яка є частинним випадком задачі Штурма-Ліувілля, розглянутої у прикладі 1. Розв'язки цієї задачі мають вигляд

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2,\ n \ge 1,\ X_n(x) = \sin\frac{n\pi}{l}x\,,\ n \ge 0\,.$$

Підставимо ряд $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x$ у рівняння задачі. Маємо

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n^{//}\sin\frac{n\pi}{l}x = -\sum_{n=1}^{\infty} T_n\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \sin\frac{n\pi}{l}x + A\sin\omega t$$

або

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(T_n^{//}+\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 T_n\right)\sin\frac{n\pi}{l}x = A\sin\omega t .$$

Враховуючи ортогональність системи власних функцій задачі Штурма-Ліувілля, помножимо праву та ліву частини останньої рівності на $\sin\frac{n\pi}{l}x$ та проінтегруємо за x по проміжку $(0,l)$. В результаті для парних n отримаємо однорідне рівняння

$$T_n^{//}+\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 T_n = 0 ,\ n\ge 2 ,\ n = 2k ,$$

а для непарних n — неоднорідне рівняння

$$T_n^{//}+\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 T_n = \frac{2lA}{n\pi}\sin\omega t ,\ n\ge 1 ,\ n = 2k .$$

Очевидно, що для випадку парного n загальним розв'язком однорідного рівняння є

$$T_n = A_n\cos\frac{n\pi}{l}t + B_n\sin\frac{n\pi}{l}t .$$

Таким же буде загальний розв'язок однорідного рівняння у випадку непарного n.

Знайдемо вигляд частинного розв'язку неоднорідного рівняння у випадку непарного n. При цьому розглянемо такі випадки:

1. Число ω не співпадає з величиною $\frac{n\pi}{l}$ для жодного непарного n.

У цьому випадку число $i\omega$ не є коренем характеристичного рівняння, що відповідає диференціальному рівнянню для знаходження T_n і неоднорідний розв'язок слід шукати у вигляді

$$\widetilde{T}_n = C_n\cos\omega t + D_n\sin\omega t .$$

Підстановка розв'язку вказаного вигляду у диференціальне рівняння дозволяє встановити, що $C_n = 0$ і $D_n = \dfrac{2lA}{n\pi\left(\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2-\omega^2\right)}$, і отже

$$\widetilde{T}_n = \frac{2lA\sin\omega t}{n\pi\left(\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2-\omega^2\right)} .$$

2. Існує таке непарне n_0, що $\omega = \dfrac{n_0 \pi}{l}$.

Тоді для випадку такого n_0 число $i\omega$ є простим коренем характеристичного рівняння, що відповідає рівнянню

$$T_{n_0}^{//} + \left(\frac{n_0 \pi}{l}\right)^2 T_{n_0} = \frac{2lA}{n_0 \pi} \sin \omega t .$$

У цьому випадку частинний розв'язок неоднорідного рівняння слід шукати у вигляді

$$\widetilde{T}_{n_0} = t(C_{n_0} \cos \omega t + D_{n_0} \sin \omega t) .$$

Підстановка розв'язку вказаного вигляду у диференціальне рівняння (з урахуванням умови $\omega = \dfrac{n_0 \pi}{l}$) дозволяє встановити, що $C_{n_0} = -\dfrac{A}{\omega^2}$ і $D_{n_0} = 0$, і отже

$$\widetilde{T}_{n_0} = -\frac{At}{\omega^2} \cos \omega t .$$

Для решти значень n, коли $\dfrac{n\pi}{l} \neq \omega$, пошук частинних розв'язків неоднорідного рівняння здійснюється за тією ж схемою і з тим же результатом, як це було зроблено у першому випадку.

Таким чином, у тому випадку, коли $\dfrac{n\pi}{l} \neq \omega$ для усіх непарних n, вигляд ряду, за допомогою якого ми шукаємо розв'язок досліджуваної задачі, буде

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi}{l} t + B_n \sin \frac{n\pi}{l} t \right) \sin \frac{n\pi}{l} x +$$
$$+ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2lA \sin \omega t}{(2k+1)\pi \left(\left(\frac{(2k+1)\pi}{l} \right)^2 - \omega^2 \right)} \sin \frac{(2k+1)\pi}{l} x .$$

Підстановка цього ряду в однорідні початкові умови задачі дозволяє знайти невідомі коефіцієнти: $A_n = 0$, $n \geq 1$, $B_n = 0$ для парних n та

$B_n = -\dfrac{2l^2\omega A}{n^2\pi^2\left(\left(\dfrac{n\pi}{l}\right)^2 - \omega^2\right)}$ для непарних n. Остаточна відповідь у цьому випадку має вигляд:

$$u(x,t) = 2lA\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin\omega t - \dfrac{l\omega}{(2k+1)\pi}\sin\dfrac{(2k+1)}{l}t}{(2k+1)\pi\left(\left(\dfrac{(2k+1)\pi}{l}\right)^2 - \omega^2\right)}\sin\frac{(2k+1)\pi}{l}x .$$

У тому ж випадку, коли існує таке непарне n_0, що $\omega = \dfrac{n_0\pi}{l}$, вигляд ряду, за допомогою якого ми шукаємо розв'язок досліджуваної задачі, буде

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{n\pi}{l}t + B_n\sin\frac{n\pi}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x +$$

$$+ \sum_{\substack{k=0 \\ 2k+1\neq n_0}}^{\infty}\frac{2lA\sin\omega t}{(2k+1)\pi\left(\left(\dfrac{(2k+1)\pi}{l}\right)^2 - \omega^2\right)}\sin\frac{(2k+1)\pi}{l}x -$$

$$-\frac{At}{\omega^2}\cos\omega t\sin\frac{n_0\pi}{l}x .$$

Підстановка цього ряду в однорідні початкові умови задачі дозволяє знайти невідомі коефіцієнти: $A_n = 0$, $n \geq 1$, $B_n = 0$ для парних n і $B_n = -\dfrac{2l^2\omega A}{n^2\pi^2\left(\left(\dfrac{n\pi}{l}\right)^2 - \omega^2\right)}$ для непарних n, коли $n \neq n_0$. У випадку, коли $n = n_0$, маємо $B_{n_0} = \dfrac{A}{\omega^3}$. Остаточна відповідь у цьому випадку має вигляд:

$$u(x,t)=2lA\sum_{\substack{k=0\\2k+1\neq n_0}}^{\infty}\frac{(2k+1)\pi\sin\omega t-l\omega\sin\frac{n\pi}{l}t}{(2k+1)^2\pi^2\left(\left(\frac{(2k+1)\pi}{l}\right)^2-\omega^2\right)}\sin\frac{(2k+1)\pi}{l}x-$$

$$-\frac{A}{\omega^3}(\sin\omega t-\omega t\cos\omega t)\sin\frac{n_0\pi}{l}x\,.$$

Аналіз отриманих розв'язків досліджуваної крайової задачі дає змогу побачити, що за допомогою крайової задачі про коливання струни дійсно можна моделювати такі явища, як резонанс під час коливань, а метод відокремлення змінних дає можливість отримувати вигляд розв'язку у «резонансному» випадку.

§ 5. Розв'язання крайових задач коливань струни з неоднорідними крайовими умовами

Приклади розв'язання крайових задач коливання струни, розглянуті у попередніх параграфах, мають одну спільну рису. Нескладно помітити, що крайові умови задач, для яких було застосовано метод відокремлення змінних, були однорідними. Саме це дає змогу переходити до задачі Штурма-Ліувілля відшукання власних значень та власних функцій диференціального оператора на скінченному відрізку. Якщо ж крайові умови задачі, яку ми розв'язуємо, неоднорідні, то пряме застосування до такої задачі метода Штурма-Ліувіллля є неможливим та некоректним.

Звідси, алгоритм наших дій при розв'язанні крайової задачі з неоднорідними крайовими умовами за допомогою методу відокремлення змінних (це може бути, наприклад, задача про коливання скінченної струни), виглядає таким чином:

1. Знаходимо двічі неперервно диференційовану за t та x функцію v, яка б задовольняла крайові умови задачі (така функція не обов'язково має задовольняти рівняння або початкові умови).
2. Подаючи розв'язок шуканої задачі у вигляді $u=v+w$, для функції w отримуємо задачу з однорідними крайовими умовами.
3. Розв'язавши задачу для функції w за допомогою методу відокремлення змінних, знаходимо вигляд функції u – розв'язку початкової задачі.

На жаль, неможливо запропонувати чіткий алгоритм відшукання функції v. Її вигляд залежить від вигляду крайових умов, а також може визначатись з міркувань зручності її використання для спрощення конкретної крайової задачі. Однак, деякі поради по відшуканню такої функції, усе ж таки, можна дати.

1. Якщо крайові умови мають вигляд $u(0,t)=\xi(t)$, $u(l,t)=\eta(t)$, то пошук функції v у вигляді
$$v=(Ax+B)\xi(t)+(Cx+D)\eta(t) \qquad (34)$$
з подальшим підбором коефіцієнтів A, B, C, D так, щоб v задовольняла крайові умови, дає рівність

$$v = \left(1 - \frac{x}{l}\right)\xi(t) + \frac{x}{l}\eta(t).$$

2. Якщо крайові умови мають вигляд $u(0,t) = \xi(t)$, $\frac{\partial u}{\partial x}(l,t) = \eta(t)$, то пошук функції v у вигляді (34) з подальшим підбором невідомих коефіцієнтів A, B, C, D дає рівність

$$v = \xi(t) + x\eta(t).$$

3. Якщо крайові умови мають вигляд $\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \xi(t)$, $u(l,t) = \eta(t)$, то пошук функції v у вигляді (34) з подальшим підбором невідомих коефіцієнтів A, B, C, D дає рівність

$$v = (x - l)\xi(t) + \eta(t).$$

4. Якщо крайові умови мають вигляд $\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \xi(t)$, $\frac{\partial u}{\partial x}(l,t) = \eta(t)$, то пошук функції v у вигляді

$$v = (Ax^2 + Bx)\xi(t) + (Cx^2 + Dx)\eta(t)$$

з подальшим підбором шуканих коефіцієнтів A, B, C, D так, щоб v задовольняла крайові умови, дає рівність

$$v = \left(x - \frac{x^2}{2l}\right)\xi(t) + \frac{x^2}{2l}\eta(t).$$

Приклад 9.

Розв’язати задачу:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ x \in (0,2),\ t > 0, \tag{35}$$

$$u(0,t) = 2t, u(2,t) = 0,\ t \geq 0, \tag{36}$$

$$u(x,0) = 0,\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0,\ x \in [0,2]. \tag{37}$$

Розв’язання: У даному прикладі можна взяти функцію v у вигляді $v = \left(1 - \frac{x}{2}\right)2t = (2 - x)t$. Подання розв’язку задачі за допомогою формули $u = v + w$ призводить до такої задачі для невідомої функції w:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2},\ x \in (0,2),\ t > 0, \tag{38}$$

$$w(0,t)=0,\ \ w(2,t)=0\,,\ t\geq 0\,, \qquad (39)$$

$$w(x,0)=0\,,\ \frac{\partial w}{\partial t}(x,0)=x-2\,,\ x\in[0,2]\,. \qquad (40)$$

Задачу (38) – (40) можна розв'язати за допомогою методу відокремлення змінних. Розв'язок задачі будемо шукати у вигляді ряду

$$w(x,t)=\sum_n X_n(x)\,T_n(t)\,.$$

Від кожного окремого доданку $X_n(x)\,T_n(t)$ ряду будемо вимагати виконання рівняння та крайових умов задачі. Підстановка функції $X(x)\,T(t)$ у рівняння дає співвідношення

$$XT''=X''T-XT\,,$$

а отже, змінні можна відокремити:

$$\frac{X''}{X}=\frac{T''+T}{T}=-\lambda\,.$$

Враховуючи крайові умови, задача Штурма-Ліувілля для функції $X(x)$ набуває вигляду

$$X''+\lambda X=0,\ x\in(0,2),\quad X(0)=X(2)=0\,.$$

Згідно з прикладом 1, розв'язки цієї задачі мають вигляд

$$\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2,\ n\geq 0\,,\ X_n(x)=\sin\frac{n\pi}{2}x\,,\ n\geq 1\,.$$

Тоді для функцій $T_n(t)$ при кожному фіксованому $n\geq 1$ справедливе рівняння:

$$T_n^{//}+\frac{\pi^2 n^2}{4}T_n=0\,,$$

звідки при кожному $n\geq 1$ знаходимо

$$T_n(t)=A_n\cos\frac{n\pi}{2}t+B_n\sin\frac{n\pi}{2}t\,.$$

Таким чином, ряд, за допомогою якого ми шукаємо розв'язок задачі (38) – (40), набуває вигляду:

$$w(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{n\pi}{2}t+B_n\sin\frac{n\pi}{2}t\right)\sin\frac{n\pi}{2}x.$$

Значення вільних коефіцієнтів A_n та B_n визначимо за допомогою підстановки ряду у початкові умови (40). Така підстановка призводить до рівностей

$$w(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi}{2}x=0\,,\ x\in[0,2]\,,$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{n\pi}{2}\sin\frac{n\pi}{2}x=x-2\,,\ x\in[0,2]\,.$$

З першої рівності випливає, що $A_n=0,\ n\ge 1$. Використовуючи факт ортогональності власних функцій задачі Штурма-Ліувілля в просторі $L_2(0,1)$, для коефіцієнтів B_n отримуємо рівності:

$$B_n=\frac{2}{n\pi}\int_0^2 (x-2)\sin\frac{n\pi}{2}x\,dx=$$

$$=-\frac{2}{n^2\pi^2}(x-2)\cos\frac{n\pi}{2}x\Big|_0^2+\frac{2}{n^2\pi^2}\int_0^2\cos\frac{n\pi}{2}x\,dx=-\frac{8}{n^2\pi^2}\,,\ n\ge 1\,.$$

Отже, відповіддю у задачі (38) – (40) буде ряд

$$w(x,t)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}t\sin\frac{n\pi}{2}x.$$

Тоді відповідь у задачі (35) – (37) має вигляд:

$$u(x,t)=(2-x)t-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}t\sin\frac{n\pi}{2}x\,.$$

§ 6. Застосування методу відокремлення змінних для задач про розповсюдження тепла у тонкому однорідному стрижні

Метод відокремлення змінних може бути застосовано до розв'язання досить широкого спектру задач. Ми вже розглянули методику використання відокремлення змінних для задач про коливання струни. Володіння розглянутою методикою дозволяє застосувати її і для інших видів задач, до яких, зокрема, відносяться задачі про розповсюдження тепла усередині тонкого однорідного стрижня (постановку задач такого вигляду можна знайти, наприклад, у [8]). Характерною відмінністю задач про розповсюдження тепла є більш низький, аніж у задачах про коливання, порядок диференціювання по часовій змінній у рівнянні і, як наслідок, менша кількість початкових умов. Це разом призводить до спрощення формул пошуку розв'язку.

Приклад 10.

Розв'язати задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,,\ 0<x<l\,,\ t>0\,, \qquad (41)$$

$$u(0,t)=u(l,t)=0\,,\ t\ge 0\,, \qquad (42)$$

$$u(x,0)=\varphi(x)\,,\ \ x\in[0,l]\,. \qquad (43)$$

Розв'язання. Застосуємо до пошуку розв'язку задачі (41) — (43) метод відокремлення змінних. Основні етапи застосування методу відокремлення змінних до пошуку розв'язку задачі (41) — (43) такі ж, як і для пошуку розв'язку задачі про вільні коливання струни (9) — (11).

Розв'язок задачі (41) — (43) шукатимемо у вигляді ряду

$$u(x,t)=\sum_{n} X_n(x)\,T_n(t)\,. \qquad (44)$$

Кількість та вигляд доданків ряду (12) буде визначено у процесі розв'язання задачі (41) — (43).

Від кожного окремого доданку $X_n(x)\,T_n(t)$ ряду (44) будемо вимагати виконання рівняння (41) та крайових умов (42).

Підстановка функції $X(x)\,T(t)$ у рівняння (41) дає співвідношення

$$XT' = a^2 X'' T\,,$$

звідки отримуємо

$$\frac{X''}{X}=\frac{T'}{a^2T}=-\lambda\,. \qquad (45)$$

Вимога виконання для функції вигляду $X(x)T(t)$ крайових умов (10) призводить до рівності

$$X(0)T(t)=X(l)T(t)=0\,,$$

виконання якої за умов нетривіальності функції $X(x)T(t)$ може бути забезпечено за виконання умов

$$X(0)=X(l)=0\,. \qquad (46)$$

Зі співвідношень (45), (46) для функції $X(x)$ дістаємо задачу

$$X''+\lambda X=0,\ x\in(0,l),\quad X(0)=X(l)=0\,, \qquad (47)$$

Згідно з прикладом 1, розв'язки задачі (47) мають вигляд

$$\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2,\quad X_n(x)=\sin\frac{n\pi}{l}x\,,\ \ n\ge 1\,. \qquad (48)$$

Користуючись формулою розв'язку (48) та співвідношенням (45), встановлюємо, що для функцій $T_n(t)$ для кожного фіксованого $n\ge 1$ справедливе рівняння:

$$T_n^{//}+\left(\frac{n\pi\, a}{l}\right)^2 T_n=0\,,$$

звідки маємо для кожного $n\ge 1$

$$T_n(t) = A_n \exp\left(-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t\right). \qquad (49)$$

Таким чином, ряд (44), за допомогою якого ми шукаємо розв'язок задачі (41) — (43), набуває вигляду:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp\left(-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t\right) \sin\frac{n\pi}{l} x. \qquad (50)$$

Підстановка ряду (50) в початкову умову (43) призводить до рівності

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi}{l} x = \varphi(x), \ x \in [0,l]. \qquad (51)$$

Використовуючи властивість ортогональності власних функцій задачі Штурма-Ліувілля (властивість 3 з § 1 при $\rho(x) = 1$), коефіцієнти A_n можемо шукати, помноживши ліву та праву частину рівності (51) на функцію вигляду $\sin\frac{k\pi}{l} x$ та проінтегрувавши по проміжку $(0,l)$. Дістаємо рівність

$$A_k \frac{l}{2} = \int_0^l \varphi(x) \sin\frac{k\pi}{l} x \, dx,$$

звідки

$$A_k = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x) \sin\frac{k\pi}{l} x \, dx, \ k \geq 1.$$

Приклад 11.

Розв'язати задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \ x \in (0,l), \ t > 0, \qquad (52)$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \ t \geq 0, \qquad (53)$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \ x \in [0,l], \qquad (54)$$

Розв'язання. Застосуємо до пошуку розв'язку задачі (52) — (54) метод відокремлення змінних. Основні етапи та алгоритм застосування методу відокремлення змінних до пошуку розв'язку задачі (52) — (54) такі ж, як і для пошуку розв'язку задачі про вимушені коливання струни (24) — (26).

Однорідне рівняння, яке відповідає рівнянню (52), співпадає з рівнянням (41). Зважаючи на те, що крайові умови (53) співпадають з умовами (42), можна стверджувати, що у даному випадку $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$, а $X_n(x) = \sin\frac{n\pi}{l}x$, $n \ge 1$.

Підставимо ряд $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x$ у рівняння (52). Маємо

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n^{/}\sin\frac{n\pi}{l}x = -a^2\sum_{n=1}^{\infty} T_n\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\sin\frac{n\pi}{l}x + f(x,t),$$

або

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(T_n^{/} + \left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 T_n\right)\sin\frac{n\pi}{l}x = f(x,t).$$

Враховуючи ортогональність системи власних функцій задачі Штурма-Ліувілля, помножимо праву та ліву частини останньої рівності на $\sin\frac{n\pi}{l}x$ та проінтегруємо за x по проміжку $(0,l)$. В результаті отримаємо рівняння

$$T_n^{/} + \left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 T_n = f_n(t),\ t > 0,\ n \ge 1,$$

де

$$f_n(t) = \frac{2}{l}\int_0^l f(x,t)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx,\ n \ge 1. \quad (55)$$

Розв'язуючи ці рівняння за допомогою методів розв'язання звичайних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами (див., наприклад, [20], [21]), можемо записати

$$T_n(t) = A_n\exp\left(-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t\right) + \int_0^t f_n(\tau)\exp\left(\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2(\tau - t)\right)d\tau$$

і, отже, маємо

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\exp\left(-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t\right) + \right.$$
$$\left. + \int_0^t f_n(\tau)\exp\left(\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2(\tau - t)\right)d\tau\right)\sin\frac{n\pi}{l}x. \quad (56)$$

Підстановка виразу (56) у початкову умову (54) дає рівність

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\frac{n\pi}{l}x=\varphi(x)\,,\ x\in[0,l]\,,$$

з якої, як і в попередньому прикладі,

$$A_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx\,,\ n\ge 1\,.$$

Нарешті, у випадку неоднорідних крайових умов, наші дії по застосуванню методу відокремлення змінних до задачі теплообміну у стрижні залишаються також повністю аналогічними діям, здійсненим при розв'язанні відповідних задач про коливання струни.

Приклад 12.

Розв'язати задачу:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,,\ x\in(0,2)\,,\ t>0\,, \tag{57}$$

$$u(0,t)=2t, u(2,t)=0\,,\ t\ge 0\,, \tag{58}$$

$$u(x,0)=0\,,\ x\in[0,2]\,. \tag{59}$$

Розв'язання: Можна взяти функцію v, яка б задовольняла крайові умови (58), у вигляді $v=\left(1-\dfrac{x}{2}\right)2t=(2-x)t$. Подання розв'язку задачі за допомогою формули $u=v+w$ призводить до такої задачі для невідомої функції w:

$$\frac{\partial w}{\partial t}=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-w+x-2\,,\ x\in(0,2)\,,\ t>0\,, \tag{60}$$

$$w(0,t)=0,\ \ w(2,t)=0\,,\ t\ge 0\,, \tag{61}$$

$$w(x,0)=0\,,\ x\in[0,2]\,. \tag{62}$$

Задачу (60) – (62) можна розв'язати за допомогою методу відокремлення змінних для випадку задачі з неоднорідним рівнянням. Розв'язок задачі (60) — (62) будемо шукати у вигляді ряду

$$w(x,t)=\sum_n X_n(x)T_n(t)\,.$$

Підстановка функції $X(x)T(t)$ в однорідне рівняння, що відповідає рівнянню (60), дає співвідношення

$$XT'=X''T\,,$$

$$\frac{X''}{X}=\frac{T'}{T}=-\lambda\,.$$

Враховуючи крайові умови, задача Штурма-Ліувілля для функції $X(x)$ набуває вигляду

$$X''+\lambda X = 0,\ x \in (0,2), \quad X(0) = X(2) = 0\,.$$

Згідно з прикладом 1, розв'язки цієї задачі мають вигляд

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{2}\right)^2,\ n \ge 0\,,\ X_n(x) = \sin\frac{n\pi}{2}x\,,\ n \ge 1\,.$$

Підставимо ряд $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin\frac{n\pi}{2}x$ у рівняння (60). Маємо

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n^{/}\sin\frac{n\pi}{2}x = -\sum_{n=1}^{\infty} T_n\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2\sin\frac{n\pi}{2}x + x - 2\,,$$

або

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(T_n^{/} + \left(\frac{n\pi}{2}\right)^2 T_n\right)\sin\frac{n\pi}{l}x = x - 2\,.$$

Враховуючи ортогональність системи власних функцій задачі Штурма-Ліувілля, помножимо праву та ліву частини останньої рівності на $\sin\frac{n\pi}{l}x$ та проінтегруємо за x по проміжку $(0,l)$. В результаті отримаємо рівняння

$$T_n^{/} + \left(\frac{n\pi}{2}\right)^2 T_n = -\frac{4}{n\pi}\,,\ t \ge 0\,,\ n \ge 1\,,$$

загальний розв'язок якого має вигляд

$$T_n = A_n\exp\left(-\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2 t\right) - \frac{16}{(n\pi)^3}\,,\ n \ge 1\,.$$

Таким чином, ряд, за допомогою якого ми шукаємо розв'язок задачі (60) — (62), набуває вигляду:

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\exp\left(-\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2 t\right) - \frac{16}{(n\pi)^3}\right)\sin\frac{n\pi}{2}x.$$

Значення коефіцієнтів A_n визначимо за допомогою підстановки ряду у початкову умову (62). Така підстановка призводить до рівності

$$w(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n - \frac{16}{(n\pi)^3}\right)\sin\frac{n\pi}{2}x = 0\,,\ x \in [0,2]\,,$$

звідки $A_n = \dfrac{16}{(n\pi)^3}$, $n \ge 1$.

Отже, відповіддю у задачі (60) – (62) буде ряд

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{(n\pi)^3} \left(\exp\left(-\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2 t \right) - 1 \right) \sin\frac{n\pi}{2} x.$$

Тоді відповідь у задачі (57) – (59) має вигляд:

$$u(x,t) = (2-x)t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{(n\pi)^3} \left(\exp\left(-\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2 t \right) - 1 \right) \sin\frac{n\pi}{2} x .$$

Задачі для практичних занять та самостійної роботи

Задачі до § 1

3.1. Знайти функцію Гріна[1] оператора L на інтервалі $(0,1)$ у таких випадках:

1) $Lu = -u''$, $u(0) = u(1) = 0$;
2) $Lu = -u''$, $u'(0) = u(0)$, $u'(1) + u(1) = 0$;
3) $Lu = -u''$, $u(0) = hu'(0)$, $h \ne -1$, $u(1) = 0$;
4) $Lu = -u'' - u$, $u(0) = u(1) = 0$;
5) $Lu = -u'' - u$, $u(0) = u'(0)$, $u(1) = u'(1)$;
6) $Lu = -u'' + u$, $u(0) = u(1) = 0$;
7) $Lu = -u'' + u$, $u'(0) = u'(1) = 0$.

3.2. Знайти функцію Гріна оператора L на інтервалі $(1,2)$ у таких випадках:

1) $Lu = -x^2 u'' - 2xu'$, $u'(1) = 0$, $u(2) = 0$;
2) $Lu = -xu'' - u'$, $u'(1) = 0$, $u(2) = 0$;
3) $Lu = -x^3 u'' - 3x^2 u' - xu$, $u(1) = 0$, $u(2) + 2u'(2) = 0$;
4) $Lu = -x^4 u'' - 4x^3 u' - 2x^2 u$, $u(1) + u'(1) = 0$, $u(2) + 3u'(2) = 0$.

3.3. Знайти функцію Гріна оператора L на інтервалі $\left(0, \dfrac{\pi}{4}\right)$ у таких випадках:

[1] Схему побудови функції Гріна викладено у додатку 1.

1) $Lu = -(\cos^2 x \cdot u')'$, $u(0) = 0$, $u\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 0$;

2) $Lu = -\left(\dfrac{u'}{\cos x}\right)'$, $u(0) = 0$, $u\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 0$;

3) $Lu = -\cos^2 x \cdot u'' + \sin 2x \cdot u'$, $u(0) = u'(0)$,

$u\left(\dfrac{\pi}{4}\right) + u'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 0$.

3.4. Знайти функцію Гріна оператора L на інтервалі $(0,1)$ у таких випадках:

1) $Lu = -(1 + x^2)u'' - 2xu'$, $u(0) = u'(0)$, $u(1) = 0$;

2) $Lu = -(1 + x^2)u'' - 2xu'$, $u(0) = 0$, $u(1) = u'(1)$;

3) $Lu = -(3 + x^2)u'' - 2xu'$, $u(0) = u'(0)$, $u(1) = 0$;

4) $Lu = -(x + 1)^2 u'' - 2(x + 1)u' + 2u$, $u(0) = u(1) = 0$;

5) $Lu = -\left(\dfrac{u'}{x - 2}\right)' + \dfrac{3u}{(x - 2)^3}$, $u(0) = u(1) = 0$;

6) $Lu = -(4 - x^2)u'' + 2xu'$, $u(0) = u(1) = 0$;

7) $Lu = -(xu')' + \dfrac{4}{x}u$, $u(0) = u(1) = 0$;

8) $Lu = -\dfrac{1}{x^2}u'' + \dfrac{2}{x^3}u' - \dfrac{2}{x^4}u$, $u(0) = u(1) = 0$.

3.5. Знайти функцію Гріна оператора L на інтервалі $\left(0, \dfrac{\pi}{4}\right)$ за умов $|u(0)| < \infty$, $u\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 0$ у таких випадках:

1) $Lu = -(\mathrm{tg}^2 x \cdot u')'$;

2) $Lu = -(\mathrm{tg}\, x \cdot u')'$.

3.6. Виконати зведення задачі Штурма-Ліувілля до інтегрального рівняння[2] у таких випадках:

---

[2] Схему зведення задачі Штурма-Ліувілля до операторного рівняння за допомогою функції Гріна викладено у додатку 1.

1) $Lu = -(1+e^x)u'' - e^x u' = \lambda x^2 u$, $0 < x < 1$, $u(0) - 2u'(0) = 0$, $u'(1) = 0$;

2) $Lu = -(x^2+1)u'' - 2xu' + 2u = \lambda u$, $0 < x < 1$, $u'(0) = 0$, $u(1) - u'(1) = 0$;

3) $Lu = -\sqrt{1+e^{2x}}u'' - \dfrac{e^{2x}}{\sqrt{1+e^{2x}}}u' = \lambda xu$, $0 < x < 1$, $u(0) = \sqrt{2}u'(0)$, $u'(1) = 0$;

4) $Lu = -(1-x^2)u'' + 2xu' - 2u = \lambda u$, $0 < x < 1$, $u'(0) = 0$, $|u(1)| < \infty$;

5) $Lu = -\cos^4 x \cdot u'' + 4\sin x \cos^3 x \cdot u' = \lambda xu$, $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, $2u(0) - u'(0) = 0$, $\left|u\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right| < \infty$.

Задачі до §§ 2 – 5

2.1. Розв'язати задачу про коливання струни $0 \le x \le l$ з закріпленими кінцями, якщо початкові швидкості точок струни дорівнюють нулю, а початкове відхилення u_0 має форму:

1) синусоїди $u_0(x) = A\sin\dfrac{n\pi x}{l}$ (n – ціле);

2) параболи, віссю симетрії якої слугує пряма $x = \dfrac{l}{2}$, а вершиною – точка $M\left(\dfrac{l}{2}, h\right)$;

3) ламаної OAB з вершинами у точках де $O(0,0)$, $A(c,h)$, $B(l,0)$, де $0 < c < l$. Розглянути випадок $c = \dfrac{l}{2}$.

2.2. Розв'язати задачу про коливання струни $0 \le x \le l$ із жорстко закріпленими кінцями, якщо у початковому положенні струна знаходиться у спокої ($u_0 = 0$), а початкова швидкість визначається формулою:

1) $u_1(x) = v_0 = const$, $x \in [0,l]$;

2) $u_1(x) = \begin{cases} v_0, & x \in [\alpha, \beta] \\ 0, & x \notin [\alpha, \beta] \end{cases}$, де $0 \le \alpha < \beta \le l$;

3) $u_1(x) = \begin{cases} A\cos\dfrac{\pi(x - x_0)}{2a}, & x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \\ 0, & x \notin [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \end{cases}$, де $0 \le x_0 - \alpha < x_0 + \alpha \le l$.

2.3. Розв'язати такі мішані задачі:

1) $u_{tt} = u_{xx} - 4u$, $0 < x < 1$, $u(0,t) = u(1,t) = 0$, $u(x,0) = x^2 - x$, $u_t(x,0) = 0$;

2) $u_{tt} + 2u_t = u_{xx} - u$, $0 < x < \pi$, $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$, $u(x,0) = \pi x - x^2$, $u_t(x,0) = 0$;

3) $u_{tt} + 2u_t = u_{xx} - u$, $0 < x < \pi$, $u_x(0,t) = 0$, $u(\pi,t) = 0$, $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = x$;

4) $u_{tt} + u_t = u_{xx}$, $0 < x < 1$, $u(0,t) = t$, $u(1,t) = 0$, $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = 1 - x$;

5) $u_{tt} = u_{xx} + u$, $0 < x < 2$, $u(0,t) = 2t$, $u(2,t) = 0$, $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = 0$;

6) $u_{tt} = u_{xx} + u$, $0 < x < l$, $u(0,t) = 0$, $u(l,t) = t$, $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = \dfrac{x}{l}$.

2.4. Розв'язати такі мішані задачі:

1) $u_{tt} = u_{xx} + x$, $0 < x < \pi$, $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$, $u(x,0) = \sin 2x$, $u_t(x,0) = 0$;

2) $u_{tt} + u_t = u_{xx} + 1$, $0 < x < 1$, $u(0,t) = u(1,t) = 0$, $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = 0$.

2.5. Розв'язати такі мішані задачі:

1) $u_{tt} - u_{xx} + 2u_t = 4x + 8e^t \cos x$, $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, $u_x(0,t) = 2t$, $u\left(\dfrac{\pi}{2}, t\right) = \pi t$, $u(x,0) = \cos x$, $u_t(x,0) = 2x$;

2) $u_{tt}-u_{xx}-2u_t=4t(\sin x-x)$, $0<x<\dfrac{\pi}{2}$, $u(0,t)=3$,

$u_x\left(\dfrac{\pi}{2},t\right)=t^2+t$, $u(x,0)=3$, $u_t(x,0)=x+\sin x$;

3) $u_{tt}-3u_t=u_{xx}+u-x(4+t)+\cos\dfrac{3x}{2}$, $0<x<\pi$, $u_x(0,t)=t+1$,

$u(\pi,t)=\pi(t+1)$, $u(x,0)=x$, $u_t(x,0)=x$;

4) $u_{tt}-7u_t=u_{xx}+2u_x-2t-7x-e^{-x}\sin 3x$, $0<x<\pi$,

$u(0,t)=0$, $u(\pi,t)=\pi t$, $u(x,0)=0$, $u_t(x,0)=x$;

5) $u_{tt}+2u_t=u_{xx}+8u+2x(1-4t)+\cos 3x$, $0<x<\dfrac{\pi}{2}$,

$u_x(0,t)=t$, $u\left(\dfrac{\pi}{2},t\right)=\dfrac{\pi t}{2}$, $u(x,0)=0$, $u_t(x,0)=x$;

6) $u_{tt}=u_{xx}+4u+2\sin^2 x$, $0<x<\pi$, $u_x(0,t)=0$, $u_x(\pi,t)=0$,

$u(x,0)=0$, $u_t(x,0)=0$;

7) $u_{tt}=u_{xx}+10u+2\sin 2x\cos x$, $0<x<\dfrac{\pi}{2}$, $u(0,t)=0$,

$u_x\left(\dfrac{\pi}{2},t\right)=0$, $u(x,0)=0$, $u_t(x,0)=0$;

8) $u_{tt}-3u_t=u_{xx}+2u_x-3x-2t$, $0<x<\pi$, $u(0,t)=0$,

$u(\pi,t)=\pi t$, $u(x,0)=e^{-x}\sin x$, $u_t(x,0)=x$.

2.6. Розв’язати задачу про повздовжні коливання однорідного стрижня за довільних початкових даних у кожному з таких випадків:

1) один кінець стрижня ($x=0$) жорстко закріплений, а інший кінець ($x=l$) вільний;
2) обидва кінця стрижня вільні;
3) один кінець стрижня ($x=0$) закріплений пружно, а інший кінець $(x=l)$ вільний.

2.7. Знайти повздовжні коливання стрижня, якщо один його кінець ($x=0$) жорстко закріплений, а до іншого кінця ($x=l$) прикладена сила P (у момент часу $t=0$ сила перестає діяти).

2.8. Знайти силу струму[3] $i(x,t)$ у дроті довжини l, по якому тече змінний струм, якщо втрати струму відсутні, а омічним опором можна знехтувати. Припускається, що початковий струм у дроті (при $t=0$) дорівнює нулю, а початкова напруга визначається формулою $v\big|_{t=0} = E_0 \sin\dfrac{\pi x}{2l}$. Лівий кінець дроту ($x=0$) ізольований, а правий ($x=l$) заземлений.

2.9. Струна $0 \le x \le l$ з жорстко закріпленими кінцями до моменту $t=0$ знаходилася у стані рівноваги під дією поперечної сили $F_0 = const$, прикладеної до точки x_0 струни перпендикулярно до незбуреного положення струни. У початковий момент часу $t=0$ дія сили F_0 миттєво припиняється. Знайти коливання струни при $t>0$.

2.10. Струна з жорстко закріпленими кінцями збурюється ударом жорсткого плоского молоточка, що надає їй такий початковий розподіл швидкостей:

$$u_t(x,0) = \psi(x) = \begin{cases} 0, \ \ 0 \le x \le x_0 - \delta, \\ v_0, \ x_0 - \delta \le x \le x_0 + \delta, \\ 0, \ \ x_0 - \delta \le x \le l. \end{cases}$$

Знайти коливання струни, якщо початкове відхилення дорівнює нулю. Обчислити енергію окремих гармонік.

2.11. Струна з жорстко закріпленими кінцями збурюється ударом гострого молоточка, що надає їй імпульсу I у точці x_0. Знайти коливання струни, якщо початкове відхилення дорівнює нулю. Обчислити енергію окремих гармонік.

2.12. Струна з жорстко закріпленими кінцями збурюється від удару жорсткого опуклого молоточка, що надає їй початковий розподіл швидкостей

$$u_t(x,0) = \psi(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x \le x_0 - \delta, \\ v_0 \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\dfrac{x - x_0}{\delta}\right), & x_0 - \delta \le x \le x_0 + \delta, \\ 0, & x_0 - \delta \le x \le l. \end{cases}$$

Знайти коливання струни, якщо початкове відхилення дорівнює нулю. Обчислити енергію окремих гармонік.

[3] При здійсненні математичної постановки досліджуваної задачі див. [2], глава II, задача 19.

2.13. Знайти повздовжні коливання стрижня, один кінець якого ($x = 0$) закріплений жорстко, а інший $(x = l)$ вільний, за початкових умов $u(x,0) = kx$, $u_t(x,0) = 0$ при $0 \le x \le l$.

2.14. Стрижень із жорстко закріпленим кінцем $x = 0$ знаходиться у стані рівноваги під дією повздовжньої сили $F_0 = const$, прикладеної до кінця $x = l$. У момент $t = 0$ дія сили F_0 миттєво припиняється. Знайти коливання стрижня, якщо початкові швидкості дорівнюють нулю.

2.15. Знайти повздовжні коливання пружного стрижня з вільними кінцями, якщо початкові швидкості та початкові зміщення у повздовжньому напрямку довільні. Врахувати можливість рівномірного прямолінійного руху стрижня.

2.16. Один кінець стрижня ($x = l$) закріплений пружно, а інший ($x = 0$) отримує у початковий момент часу повздовжній ударний імпульс I . Знайти повздовжні коливання стрижня, якщо початкове відхилення стрижня дорівнює нулю.

2.17. Знайти повздовжні коливання стрижня з пружно закріпленими кінцями, при однакових коефіцієнтах жорсткості закріплення кінців, якщо початкові умови довільні.

2.18. Розв'язати попередню задачу, якщо коефіцієнти жорсткості закріплення кінців різні.

2.19. Знайти коливання рівня рідини у кільцевому каналі, ширина та глибина якого невеликі у порівнянні з його радіусом, якщо початкове відхилення рівня від положення рівноваги та початкова швидкість зміни цього рівня задані.

2.20. Довести адитивність енергії окремих гармонік для процесу вільних коливань струни у середовищі без опору за однорідних граничних умов першого, другого та третього роду.

2.21. Знайти поперечні коливання стрижня $0 \le x \le l$, викликані поперечним ударом у точці $x = x_0$, що надав стрижню імпульс I , якщо кінці стрижня:

1) закріплені шарнірно ("вільно спираються");
2) закріплені жорстко;
3) вільні.

2.22. Ізольований однорідний електричний дріт $0 \le x \le l$ заряджено до деякого потенціалу $v_0 = const$. У початковий момент часу кінець $x = 0$ заземлюється, а кінець $x = l$ продовжує залишатись ізольованим. Знайти розподіл напруги у дроті[4], якщо самоіндукція, опір та ємність одиниці довжини дроту відомі.

[4] Див. [2], глава II, задача 19.

2.23. Знайти електричні коливання в однорідному дроті[5] $0 \le x \le l$, якщо кінець $x = 0$ заземлений, кінець $x = l$ ізольований, початковий струм дорівнює нулю, а початковий потенціал становить

$$v(x,0) = \begin{cases} 0, & 0 < x < a \\ \dfrac{Q}{C(b-a)}, & a < x < b \\ 0, & b < x < l. \end{cases}$$

Обмежуючись випадком, коли $\dfrac{\pi}{l\sqrt{CL}} > \left| \dfrac{R}{L} - \dfrac{G}{C} \right|$, знайти вираз для напруги.

2.24. Пружний стрижень $0 \le x \le l$ розташований вертикально та верхнім кінцем ($x = 0$) жорстоко прикріплений до ліфта, який вільно падає, а досягнувши швидкості v_0, миттєво зупиняється. Знайти повздовжні коливання стрижня, якщо його нижній кінець ($x = l$) вільний.

2.25. Знайти повздовжні коливання стрижня $0 \le x \le l$, якщо один його кінець закріплений жорстко, а до другого з моменту часу $t = 0$ прикладена сила $F_0 = const$.

2.26. Знайти напругу в однорідному електричному дроті[6], опір, самоіндукція, втрати та ємність одиниці довжини якого відповідно дорівнюють R, L, G та C, якщо початковий струм та напруга дорівнюють нулю, кінець $x = l$ ізольований, а до кінця $x = 0$, починаючи з моменту $t = 0$, прикладена стала електрична рухаюча сила E.

2.27. До струни $0 \le x \le l$ з жорстко закріпленими кінцями з моменту часу $t = 0$ прикладена неперервно розподілена сила з лінійною щільністю $\Phi(x,t) = \Phi(x)\sin\omega t$. Знайти коливання струни у середовищі без опору; дослідити можливість резонансу та знайти розв'язок у випадку резонансу.

2.28. Знайти повздовжні коливання стрижня $0 \le x \le l$, кінець $x = 0$ якого закріплений жорстко, а кінець $x = l$, починаючи з моменту $t = 0$, рухається за законом $u(l,t) = A\sin\omega t$. Середовище не чинить опору коливанням.

2.29. Знайти повздовжні коливання стрижня $0 \le x \le l$, у середовищі без опору, якщо кінець $x = 0$ стрижня закріплений жорстко, а до кінця $x = l$, починаючи з моменту $t = 0$, прикладена сила $F(t) = A\sin\omega t$, $t > 0$.

---

[5] Див. [2], глава II, задача 19.
[6] Див. [2], глава II, задача 19.

2.30. Розв'язати крайову задачу про повздовжні коливання пружного горизонтального стрижня без ваги на кінці, якщо інший кінець стрижня жорстко прикріплений до вертикальної осі, котра обертається зі сталою кутовою швидкістю ω. У початковий момент стрижень знаходився у невідхиленому положенні. Згин стрижня вважати відсутнім за допомогою спеціальних напрямних, між якими ковзає стрижень під час коливань. Розглянути випадок без резонансу.

2.31. Знайти коливання струни $0 \le x \le l$ із жорстко закріпленими кінцями, якщо до точки $x = x_0$ цієї струни з моменту часу $t = 0$ прикладено поперечну силу $F(t) = A \sin \omega t$, $t > 0$. Обмежитись випадком, коли частота сили не співпадає з жодною з власних частот.

2.32. Розв'язати попередню задачу, якщо $F(t) = A \cos \omega t$.

2.33. Розв'язати задачу 2.31, якщо $F(t)$ є довільною періодичною силою з періодом ω, тобто $F(t) = \dfrac{\alpha_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (\alpha_n \cos n\omega t + \beta_n \sin n\omega t)$.

2.34. До струни $0 \le x \le l$ з жорстко закріпленими кінцями з моменту часу $t = 0$ прикладена неперервно розподілена сила з лінійною щільністю $\Phi(x,t) = \Phi_0(x) \sin \omega t$. Знайти коливання струни за нульових початкових умов, припускаючи, що середовище чинить опір, пропорційний до швидкості. Знайти усталені коливання, які являють собою головну частину розв'язку при $t \to \infty$. Зауваження. Усталені коливання мають частоту зовнішньої сили. Усі інші коливання згасають.

2.35. Розв'язати задачу 2.29, припускаючи, що коливання відбуваються у середовищі з опором, що пропорційний до швидкості. Знайти усталені коливання, що являють собою головну частину розв'язку при $t \to \infty$.

2.36. Знайти коливання струни $0 \le x \le l$ з жорстко закріпленими кінцями під дією сили, прикладеної з моменту часу $t = 0$ зі щільністю $F(x,t) = \Phi(x) t$, $0 \le x \le l$, $t > 0$, припускаючи, що середовище не чинить опору коливанням.

2.37. Знайти повздовжні коливання стрижня $0 \le x \le l$, лівий кінець якого закріплений жорстко, а до правого з моменту часу $t = 0$ прикладена сила $F(t) = At$, $t > 0$, $A = const$, припускаючи, що середовище не чинить опору коливанням.

2.38. Знайти коливання струни $0 \le x \le l$ з жорстко закріпленими кінцями, викликані ударом м'якого опуклого молоточка, припускаючи, що середовище не чинить опору коливанням. Молоточок діє на струну із силою, лінійна щільність якої дорівнює

$$F(x,t)=\begin{cases} A\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\dfrac{x-x_0}{\delta}\right)\sin\dfrac{\pi t}{\tau}, & |x-x_0|<\delta,\ 0\le t\le\tau, \\ 0, \quad |x-x_0|<\delta,\ t>\tau, \\ 0, \quad |x-x_0|\ge\delta,\ t>0. \end{cases}$$

2.39. Знайти коливання струни $0\le x\le l$ з жорстко закріпленими кінцями у середовищі без опору, викликані поперечним ударом у точці x_0, $0<x_0<l$, що передає струні у момент $t=0$ імпульс I, враховуючи цей удар як вільний член рівняння.

2.40. Знайти поперечні коливання стрижня під дією поперечної зосередженої сили $P=P_0\sin\omega t$, що прикладена починаючи з моменту $t=0$ у точці x_0 стрижня, якщо кінці стрижня закріплені шарнірно ("вільно сперті"), а середовище не чинить опору коливанням.

2.41. Кінець $x=l$ стрижня закріплений жорстко, а кінець $x=0$ шарнірно ("вільно спертий"). Знайти поперечні коливання стрижня, викликані рівномірно розподіленою поперечною силою з лінійною щільністю $f_0\sin\omega t$, що прикладена до стрижня з моменту $t=0$.

2.42. Знайти повздовжні коливання неоднорідного стрижня $0\le x\le l$ з постійним поперечним перерізом, якщо стрижень отримано з'єднанням у перерізі $x=x_0$ двох однорідних стрижнів та щільність маси та коефіцієнт пружності відповідно дорівнюють

$$\rho(x)=\begin{cases}\rho_1, & 0<x<x_0,\\ \rho_2, & x_0<x<l,\end{cases} \qquad E(x)=\begin{cases}E_1, & 0<x<x_0,\\ E_2, & x_0<x<l,\end{cases}$$

де ρ_1, ρ_2, E_1, E_2 – сталі; початкові повздовжні зсуви дорівнюють

$$u(x,0)=\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{h}{x_0}x, & 0<x<x_0,\\ \dfrac{h(l-x)}{l-x_0}, & x_0<x<l;\end{cases}$$

початкові швидкості дорівнюють нулю, а кінці стрижня закріплені жорстко.

2.43. Знайти коливання однорідної струни $0\le x\le l$ з нерухомо закріпленими кінцями та зосередженою масою M, що прикріплена до точки $x=x_0$ струни, викликані початковими відхиленнями

$$u(x,0)=\varphi(x)=\begin{cases} h\dfrac{x}{x_0}, & 0<x<x_0, \\ h\dfrac{l-x}{l-x_0}, & x_0<x<l. \end{cases}$$

Задачі до § 6

3.1. Знайти розподіл температури $u(x,t)$ усередині тонкого однорідного стрижня $0\le x\le l$, бічна поверхня якого теплоізольована, якщо:

1) кінці стрижня $x=0$ та $x=l$ підтримуються при нульовій температурі, а початкова температура $u|_{t=0}=u_0(x)$. Розглянути випадки
   i) $u_0(x)=A=const$;
   ii) $u_0(x)=Ax(l-x)$, $A=const$;
2) кінець $x=0$ підтримується при нульовій температурі, а на кінці $x=l$ відбувається теплообмін з оточуючим середовищем нульової температури, початкова температура стрижня $u|_{t=0}=u_0(x)$;
3) на обох кінцях стрижня ($x=0$ та $x=l$) відбувається теплообмін з оточуючим середовищем, а початкова температура стрижня $u|_{t=0}=u_0(x)$;
4) кінці стрижня ($x=0$ та $x=l$) теплоізольовані, а початкова температура $u|_{t=0}=u_0=const$;
5) кінці стрижня теплоізольовані, а початковий розподіл температур визначається формулою
$$u|_{t=0}=\begin{cases} u_0=const, & 0\le x\le \dfrac{l}{2}, \\ 0, & \dfrac{l}{2}<x\le l. \end{cases}$$
Дослідити поведінку $u(x,t)$ при $t\to\infty$.

6) кінці стрижня теплоізольовані, а

$$u\Big|_{t=0} = \begin{cases} \dfrac{2u_0}{l}x, & 0 \le x \le \dfrac{l}{2}, \\ \dfrac{2u_0}{l}(l-x), & \dfrac{l}{2} < x \le l, \end{cases}$$

де $u_0 = const$. Знайти $\lim\limits_{t\to\infty} u(x,t)$.

3.2. Задано тонкий однорідний стрижень $0 \le x \le l$, бічна поверхня якого теплоізольована. Знайти розподіл температури $u(x,t)$ усередині стрижня, якщо:

1) кінці стрижня підтримуються за сталих температур $u\big|_{x=0} = u_1$, $u\big|_{x=l} = u_2$, а початкова температура дорівнює $u\big|_{t=0} = u_0 = const$. Знайти $\lim\limits_{t\to\infty} u(x,t)$;
2) кінці стрижня мають сталу температуру $u\big|_{x=0} = u\big|_{x=l} = u_1$, а початкова температура задана формулою $u\big|_{t=0} = Ax(l-x)$, де $A = const$. Знайти $\lim\limits_{t\to\infty} u(x,t)$;
3) лівий кінець стрижня теплоізольовано, а правий підтримується за сталої температури $u\big|_{x=l} = u_2$, початкова температура становить $u\big|_{t=0} = \dfrac{A}{l}x$, де $A = const$;
4) Лівий кінець стрижня підтримується за заданої сталої температури $u\big|_{x=0} = u_1$, а на правий кінець зовні подається заданий сталий тепловий потік; початкова температура стрижня $u\big|_{t=0} = u_0(x)$.

3.3. Знайти розподіл температур у стрижні $0 \le x \le l$ з теплоізольованою бічною поверхнею, якщо на його правому кінці $x = l$ підтримується нульова температура, а на лівому кінці температура дорівнює $u\big|_{x=0} = At$, де $A = const$. Початкова температура стрижня дорівнює нулю.

3.4. Розв'язати такі мішані крайові задачі:

1) $u_t = u_{xx}$, $0 < x < l$, $t > 0$, $u_x\big|_{x=0} = 1$, $u\big|_{x=l} = 0$, $u\big|_{t=0} = 0$;

2) $u_t = u_{xx} + u + 2\sin 2x \sin x$, $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, $t > 0$,

$u_x\big|_{x=0} = u\big|_{x=\frac{\pi}{2}} = u\big|_{t=0} = 0$;

3) $u_t = u_{xx} - 2u_x + x + 2t$, $0 < x < 1$, $t > 0$, $u\big|_{x=0} = u\big|_{x=1} = t$,

$u\big|_{t=0} = e^x \sin \pi x$;

4) $u_t = u_{xx} + u - x + 2\sin 2x \cos x$, $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, $t > 0$, $u\big|_{x=0} = 0$,

$u_x\big|_{x=\frac{\pi}{2}} = 1$, $u\big|_{t=0} = x$;

5) $u_t = u_{xx} + 4u + x^2 - 2t - 4x^2 t + 2\cos^2 x$, $0 < x < \pi$, $t > 0$,

$u_x\big|_{x=0} = 0$, $u_x\big|_{x=\pi} = 2\pi t$, $u\big|_{t=0} = 0$;

6) $u_t - u_{xx} + 2u_x - u = e^x \sin x - t$, $0 < x < \pi$, $t > 0$,

$u\big|_{x=0} = u\big|_{x=\pi} = 1 + t$, $u\big|_{t=0} = 1 + e^x \sin 2x$.

3.5. Розв'язати такі мішані крайові задачі:

1) $u_t - u_{xx} - u = xt(2 - t) + 2\cos t$, $0 < x < \pi$, $t > 0$,

$u_x\big|_{x=0} = u_x\big|_{x=\pi} = t^2$, $u\big|_{t=0} = \cos 2x$;

2) $u_t - u_{xx} - 9u = 4\sin^2 t \cos 3x - 9x^2 - 2$, $0 < x < \pi$, $t > 0$,

$u_x\big|_{x=0} = 0$, $u_x\big|_{x=\pi} = 2\pi$, $u\big|_{t=0} = x^2 + 2$;

3) $u_t = u_{xx} + 6u + 2t(1 - 3t) - 6x + 2\cos x \cos 2x$, $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$,

$t > 0$, $u_x\big|_{x=0} = 1$, $u\big|_{x=\frac{\pi}{2}} = t^2 + \dfrac{\pi}{2}$, $u\big|_{t=0} = x$;

4) $u_t = u_{xx} + 6u + x^2(1 - 6t) - 2(t + 3x) + \sin 2x$, $0 < x < \pi$,

$t > 0$, $u_x\big|_{x=0} = 1$, $u_x\big|_{x=\pi} = 2\pi t + 1$, $u\big|_{t=0} = x$;

5) $u_t = u_{xx} + 4u_x + x - 4t + 1 + e^{-2x} \cos^2 \pi x$, $0 < x < 1$, $t > 0$,

$u\big|_{x=0} = t$, $u\big|_{x=1} = 2t$, $u\big|_{t=0} = 0$.

3.6. Знайти температуру стрижня $0 \le x \le l$ з теплоізольованою бічною поверхнею, лівий кінець якого теплоізольовано, а на правому відбувається конвективний теплообмін із середовищем, температура якого $U_0 = const$.

Початкова температура стрижня дорівнює нулю. Оцінити похибку, що виникає при заміні суми ряду, що визначає розв'язок у точці $x = 0$, його частинною сумою. Встановити, починаючи з якого моменту часу у точці $x = 0$ відношення суми усіх доданків ряду, починаючи з другого, до першого доданку буде менше за задане наперед $\varepsilon > 0$[7].

3.7. Сформулювати задачу про визначення електричної напруги у дроті, що аналогічна до такої задачі про визначення температури у стрижні: "Знайти температуру стрижня, якщо на одному його кінці та на бічній поверхні відбувається теплообмін із середовищем нульової температури, а температура другого кінця змінюється за заданим законом".

3.8. Знайти розподіл температур у тонкому однорідному кільці одиничного радіусу, на поверхні якого відбувається конвективний теплообмін з оточуючим середовищем, що має постійну температуру; початкова температура кільця задана. Зокрема, розглянути той випадок, коли у початковий момент часу кільце було рівномірно розігріте.

3.9. Знайти розподіл температур у стрижні $0 \le x \le l$ з теплоізольованою бічною поверхнею, якщо на його кінці $x = 0$ підтримується температура, що дорівнює нулю, а на кінці $x = l$ температура змінюється за законом $u(l,t) = At$, $A = const$. Початкова температура стрижня дорівнювала нулю.

3.10. Знайти температуру стрижня $0 \le x \le l$ з теплоізольованою бічною поверхнею, якщо по стрижню неперервним чином розподілені теплові джерела, щільність яких становить $\Phi(t)\sin\dfrac{\pi x}{l}$, початкова температура стрижня задана функцією $f(x)$, а температура кінців стрижня підтримується рівною нулю.

3.11. Знайти температуру стрижня з теплоізольованою бічною поверхнею, якщо температура кінців підтримується рівною нулю та

1) початкова температура стрижня є довільною функцією $f(x)$, по стрижню рівномірно розподілені теплові джерела, щільність яких $F(x,t)$;
2) у стрижні діє лише одне зосереджене теплове джерело постійної потужності Q, що знаходиться у точці x_0, $0 < x_0 < l$, а початкова температура стрижня дорівнювала нулю.

3.12. Знайти асимптотичний вираз при $t \to \infty$ для температури $u(x,t)$ у стрижні з теплоізольованою бічною поверхнею, якщо на його кінцях виконана одна з граничних умов:

[7] При цьому кажуть, що у точці $x = 0$ має місце регулярний режим з відносною точністю ε.

1) $u(0,t)=0$, $u(l,t)=A\cos\omega t$, $t\geq 0$;

2) $u(0,t)=0$, $u_x(l,t)=A\cos\omega t$, $t\geq 0$;

3) $u(0,t)=0$, $u_x(l,t)+hu(l,t)=A\cos\omega t$, $t\geq 0$.

Додаток 1. Функція Гріна крайової задачі для звичайних диференціальних рівнянь та задачі Штурма-Ліувілля

Нехай $[a,b]$ – відрізок дійсної осі. Розглянемо диференціальний оператор L від функції одної змінної:

$$Lu = -(p(x)u'(x))' + q(x)u(x), \tag{63}$$

де $p \in C^1([a,b])$, $q \in C([a,b])$, $f \in C([a,b])$, $p(x) > 0$, $x \in [a,b]$. Відносно функції $u(x)$ будемо вимагати, щоб

$$u \in C^2(a,b) \bigcap C^1([a,b]). \tag{64}$$

Нехай A_1, A_2, B_1, B_2 – невід'ємні числа, такі, що $A_i + B_i > 0$, $i = 1,2$. Нехай, крім того, $\lambda = 0$ не є власним значенням задачі Штурма-Ліувілля (3) – (5). Розглянемо крайову задачу

$$Lu = -(p(x)u'(x))' + q(x)u(x) = f(x),\ x \in (a,b) \tag{65}$$

$$A_1 u(a) - B_1 u'(a) = 0, \tag{66}$$

$$A_2 u(b) + B_2 u'(b) = 0, \tag{67}$$

яка відповідає задачі Штурма-Ліувілля (3) – (5)

Нехай $u_1(x)$, $u_2(x)$ – розв'язки рівняння $Lu = 0$, які задовольняють відповідно крайові умови (66) та (67) (з цією метою u_1 можна побудувати як розв'язок задачі $Lu_1 = 0$, $u_1(a) = B_1$, $u_1^/(a) = A_1$, а u_2 – як розв'язок задачі $Lu_1 = 0$, $u_1(b) = B_2$, $u_1^/(b) = -A_2$). Доведено (див., наприклад, [21]), що побудовані таким чином функції $u_1(x)$, $u_2(x)$ будуть лінійно незалежними.

Відшукуючи розв'язок задачі (65) – (67) за допомогою методу варіації довільної сталої у вигляді

$$u(x) = c_1(x)u_1(x) + c_2(x)u_2(x),$$

можемо встановити формулу

$$u(x) = \int_a^b G(x,y) f(y)\,dy, \tag{68}$$

де

$$G(x,y) = \frac{1}{\omega} \begin{cases} u_t(x)u_2(y), & a \le x \le y \le b, \\ u_t(y)u_2(x), & a \le y \le x \le b, \end{cases} \tag{69}$$

а $\omega = p(a) \begin{vmatrix} u_1(a) & u_2(a) \\ u_1^/(a) & u_2^/(a) \end{vmatrix}$. Доведення формули (68) детально розглянуто, наприклад, в [21].

Функція $G(x,y)$, означена за допомогою формули (69), має такі властивості:

1. Функція $G(x,y)$ неперервна у квадраті $K=[a,b]^2$, а у кожному трикутнику $\{(x,y)\in K : x\geq y\}$, $\{(x,y)\in K : x\leq y\}$ має неперервні частинні похідні $\frac{\partial G}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}$, $\frac{\partial G}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 G}{\partial y^2}$.
2. При кожному фіксованому $y\in[a,b]$ функція $G(x,y)$ задовольняє лінійне однорідне рівняння $LG(x,y)=0$ для усіх $x\in[a,b]$, $x\neq y$, а також крайові умови (66), (67).
3. На діагоналі $x=y$ похідна $\frac{\partial G}{\partial x}$ має розрив першого роду зі стрибком $\frac{1}{p(y)}$, тобто $\frac{\partial G}{\partial x}(y+0,y)-\frac{\partial G}{\partial x}(y-0,y)=\frac{1}{p(y)}$.

Крім того, отримана функція $G(x,y)$ буде симетричною, тобто $G(x,y)=G(y,x)$.

В теорії диференціальних рівнянь використовують таке означення:

Означення. Якщо функція $G(x,y)$ має властивості 1 — 3, то ця функція називається функцією Гріна задачі (65) — (67). Дану функцію називають також функцією Гріна задачі (3) — (5).

Наведене означення вводить поняття функції Гріна аксіоматично, безвідносно до її явного вигляду.

З іншого боку, якщо для задачі (65) — (67) відома функція Гріна, то для довільної функції $f\in C([a,b])$ задача (65) — (67) має єдиний розв'язок, який можна знайти за формулою (68). Це твердження доведено, наприклад, в [21].

Знання функції Гріна для задачі (3) — (5) дозволяє виконати зведення цієї задачі до операторного рівняння. Дійсно, якщо нам відома функція Гріна $G(x,y)$ задачі (3) — (5), то, згідно з формулою (68),

$$u(x)=\lambda\int_a^b G(x,y)\rho(y)u(y)dy\,. \qquad (70)$$

Рівняння (70) – інтегральне рівняння Фредгольма другого роду з симетричним ядром.

Можна довести (див., наприклад, [16]) що рівняння (70) та задача Штурма-Ліувілля (3) — (5) еквівалентні. Це дозволяє застосовувати до вивчення властивостей власних значень та власних функцій задачі Штурма-Ліувілля відомі факти з теорії інтегральних рівнянь.

Література

1. Сборник задач по уравнениям математической физики / под ред. В.С. Владимирова. – М. Наука, 1974. – 272 с.
2. Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. Сборник задач по математической физике. – М.: Наука, 1972. – 687 с.
3. Вірченко Н.О. Основні методи розв’язання задач математичної фізики. – Навчальний посібник. – Київ: КПІ, 1997. – 370 с.
4. Бицадзе А.В. Калиниченко Д.Ф. Сборник задач по уравнениям математической физики. – М.: Наука, 1977. – 224 с.
5. Смирнов М.М. Задачи по уравнениям математической физики. – М.: Наука, 1975. – 127 с.
6. Гончаренко В.М., Романенко І.Б., Самойленко В.Г. Методичні вказівки до практичних занять та самостійної роботи з курсу “Рівняння математичної фізики” для студентів механіко-математичного факультету. Постановка основних крайових задач для рівнянь математичної фізики. – К.: Навчально-освітній центр, 2003. – 36 с.
7. Гончаренко В.М., Романенко І.Б., Самойленко В.Г. Методичні вказівки до практичних занять та самостійної роботи з курсу “Рівняння математичної фізики” для студентів механіко-математичного факультету. Зведення рівнянь з частинними похідними до канонічного вигляду. – К.: Навчально-освітній центр, 2003. – 36 с.
8. Романенко І.Б., Самойленко В.Г. Навчально-методичний посібник з дисципліни «Рівняння математичної фізики». Постановка крайових задач. Зведення рівнянь до канонічного вигляду. — К.: ВПЦ “Київський університет”, 2005. — 46 с.
9. Романенко І.Б., Самойленко В.Г. Методичні вказівки до практичних занять та самостійної роботи з курсу “Рівняння математичної фізики” для студентів механіко-математичного факультету. Задача Коші та задача Гурса для рівнянь з частинними похідними. – К., 2006. – 50 с.
10. Войцеховський С.О., Гаркуша В.І., Копистира М.П. та ін. Методичні розробки до вивчення нормативного курсу «Рівняння математичної фізики» (класифікація рівнянь другого порядку, формули Даламбера і Пуассона, метод відокремлення змінних) для студентів факультету кібернетики. — К., 2001. — 65 с.
11. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1981. – 512 с.
12. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1977. – 736 с.
13. Соболев С.Л. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1966. – 444 с.
14. Гончаренко В.М. Основи теорії рівнянь з частинними похідними. – К.: Вища школа, 1995. – 350 с.
15. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. – М. Наука, 1983. – 424 с.
16. Перестюк М.О., Маринець В.В. Теорія рівнянь математичної фізики. – К: Либідь, 2001. – 334 с.

17. Положий Г.Н. Уравнения математической физики. – М.: Высш. шк., 1964. – 559 с.
18. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. – М.: Физматгиз, 1963. – 432 с.
19. Дороговцев А.Я. Математический анализ. Справочное пособие. – К.: Вища школа, 1985. – 528 с.
20. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. – М.: ГИФМЛ, 1958. – 468 с.
21. Самойленко А.М., Перестюк М.О., Парасюк І.О. Диференціальні рівняння. – К.: Либідь, 1994. – 360 с.

Зміст

Навчальне видання

Застосування методу відокремлення змінних для розв’язання одновимірних задач

Навчально-методичний посібник з дисципліни
“Рівняння математичної фізики”

Упорядники:
Романенко Ігор Борисович
Самойленко Валерій Григорович