КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

ВЕКТОРНИЙ АНАЛІЗ ТА ТЕОРІЯ ПОЛЯ

НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ

КИЇВський ВПЦ УНІВЕРСИТЕТ
2008

Рецензенти:

д-р фіз.-мат. наук, проф. В.І. Герасименко
д-р фіз.-мат. наук, проф. А.Г. Нікітін
канд. фіз.-мат. наук, доц. О.В. Капустян

Рекомендовано до друку вченою радою механіко-математичного факультету (протокол № 5 від 10 грудня 2007 року)

"Векторний аналіз та теорія поля". Навчально-методичні вказівки до практичних занять / Упорядник І.Б. Романенко. – К.: Видавничо-поліграфічний центр "Київський Університет", 2008. – 16 с.

Подано теми практичних занять та перелік задач для аудиторних занять і самостійної роботи студентів з курсу "Векторний аналіз та теорія поля".

Для студентів механіко-математичного факультету.

Тема 1. Основні геометричні поняття

Основні поняття, формули та твердження, необхідні для розв'язування задач з теми

1. Скалярний, векторний та мішаний добуток.
2. Годограф кривої.
3. Кривина, скрут.
4. Тригранник Серре-Френе. Стична, нормальна та спрямна площини для кривої.

Задачі для аудиторної роботи

1. Побудувати годографи для таких кривих:
   a. $r = 2i + t^2 j - t^2 k$;
   b. $r = ti + \frac{t^2}{3} j + \frac{t^3}{9} k$;
   c. $t = \frac{2ti + 2tj + (t^2 - 2)k}{t^2 + 2}$.
2. Довести, що з тотожності $|r| = c$ випливає $\frac{dr}{dt} \perp r$.
3. Які траєкторії руху визначені рівністю $\frac{dr}{dt} = [a, r]$, де a - сталий вектор?
4. Відомо, що точка рухається у просторі за законом $r = (a \sin t, -a \cos t, bt^2)$, де $a > 0$, $b > 0$ - деякі числа. Знайти годограф точки, її швидкості та прискорення.
5. Знайти радіус кривини таких ліній:
   a. $r = t^2 i + 2t^3 j$;
   b. $r = a(\cos t + t \sin t)i + a(\sin t - t \cos t)j$ при $t = \frac{\pi}{2}$.

6. Написати при $t=2$ рівняння стичної площини до кривої $r = ti - tj + \frac{t^2}{2}k$.
7. Знайти скрут при значенні параметра $t=0$ для кривої $r = e^t \cos t\, i + e^t \sin t\, j + e^t k$.

Задачі для самостійної роботи

1. Побудувати годографи для кривих:
   a. $r = \frac{t^2+1}{(t+1)^2} i + \frac{2t}{(t+1)^2} j$;
   b. $r = \cos t\, i + \sin t\, j + k$.
2. Нехай $r = r(t)$. Знайти похідні
   a. $\frac{d}{dt}(r^2)$;
   b. $\frac{d}{dt}\left[r, \frac{dr}{dt} \right]$.
3. Знайти радіус кривини таких ліній:
   a. $r = \ln \cos t\, i + \ln \sin t\, j + t\sqrt{2}\, k$;
   b. $r = 3t^2 i + (3t - t^3) j + 2k$ при $t=1$;
   c. $r = a \operatorname{ch} t\, i + a \operatorname{sh} t\, j + at\, k$.
4. Написати рівняння стичної площини при $t=0$ для кривої $r = e^t i + e^{-t} j + t\sqrt{2}k$.
5. Знайти формулу скруту для кривої $r = a \operatorname{ch} t\, i + a \operatorname{sh} t\, j + at\, k$.

Тема 2. Скалярні поля. Градієнт

Основні поняття, формули та твердження, необхідні для розв'язування задач з теми

1. Поверхні рівня скалярного поля.
2. Лінії рівня плоского скалярного поля.
3. Градієнт скалярного поля.

Задачі для аудиторної роботи

1. Намалювати поверхні рівня для скалярних полів:

   a. $u = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} + \dfrac{z^2}{16}$;

   b. $u = \dfrac{x^2 + y^2}{z}$;

   c. $u = \dfrac{(a, r)}{(b, r)}$, де a, b - сталі не колінеарні вектори.

2. Намалювати лінії рівня для плоских полів:

   a. $u = \ln \sqrt{\dfrac{y}{2x}}$;

   b. $u = \dfrac{y^2}{x}$.

3. Знайти та намалювати лінії рівня скалярного поля, яке визначено неявним чином за допомогою рівняння $u + x \ln u + y = 0$.

4. Знайти для функції u похідну у точці M_0 у напрямку точки M_1, якщо:

   a. $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $M_0(1,1,1)$, $M_1(3,2,1)$;

   b. $u = \dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x}$, $M_0(1,1)$, $M_1(4,5)$.

5. Знайти похідну скалярного поля $u = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$ у точці $M_0(2,-2)$ кола $x^2 + y^2 - 4x = 0$ вздовж дуги цього кола у напрямку проти годинникової стрілки.

6. Знайти точки, в яких градієнт скалярного поля $u = \sin(x + y)$ дорівнює $i + j$.

7. Знайти градієнти скалярних полів:

   a. $u = (a, r)$;

b. $u=(a,r)(b,r)$;

c. $u=|[a,r]|^2$.

Задачі для самостійної роботи

1. Намалювати поверхні рівня для скалярних полів:
   a. $u=x^2+y^2-z$;
   b. $u=3^{x+2y-z}$;
   c. $u=e^{(a,b,r)}$, де a,b - сталі не колінеарні вектори.
2. Намалювати лінії рівня для полів:
   a. $u=2x-y$;
   b. $u=e^{x^2-y^2}$.
3. Знайти для функції u похідну у точці M_0 у напрямку точки M_1, якщо:
   a. $u=x^2y+xz^2-2$, $M_0(1,1,-1)$, $M_1(2,-1,3)$;
   b. $u=xe^y+ye^x-z^2$, $M_0(3,0,2)$, $M_1(4,1,3)$.
4. Знайти похідну скалярного поля $u=x^2-y^2$ у точці $(5,4)$ гіперболи $x^2-y^2=9$ за напрямком цієї кривої при русі «зліва праворуч».
5. Знайти кут між градієнтами функцій $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ та $v=\ln(x^2+y^2+z^2)$ у точці $M(0,0,1)$.
6. Знайти похідну функції $u=yze^x$ у точці $M(0,0,1)$ за напрямком її градієнта.
7. Знайти похідну скалярного поля $u=u(x,y,z)$ за напрямком градієнта скалярного поля $v=v(x,y,z)$. У якому випадку вона буде дорівнювати 0?

Тема 3. Векторні поля. Обчислення потоку

Основні поняття, формули та твердження, необхідні для розв'язування задач з теми

1. Векторні лінії векторного поля.

2. Векторні лінії плоского векторного поля.
3. Потік векторного поля крізь поверхню.
4. Дивергенція векторного поля.
5. Формула Гауса-Остроградського.

Задачі для аудиторної роботи

1. Знайти векторні лінії поля:
   a. $a=[c,r]$, де c - сталий вектор;
   b. $a=(-y,x,b)$. Знайти ту векторну лінію, яка проходить крізь точку $(1,0,0)$.
2. Використовуючи той факт, що векторні лінії плоского векторного поля $a=(p,q,0)$ задовольняють систему рівнянь $\frac{dx}{p}=\frac{dy}{q}=\frac{dz}{0} \Leftrightarrow \frac{dx}{dy}=\frac{p}{q},\ z=const$, знайти векторні лінії полів
   a. $a=x^2i+y^2j$;
   b. $a=zj-yk$.
3. Для поля $a=(x-2z)i+(x+3y+z)j+(5x+y)k$ знайти потік крізь трикутник $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$ у напрямку нормалі, спрямованому у протилежний бік від початку координат.
4. Знайти потік векторного поля $a=y^2j+zk$ крізь частину параболоїда $z=x^2+y^2$, відрізану площиною $z=2$. Нормаль – зовнішня по відношенню до області, яку обмежує параболоїд.
5. Знайти потік векторного поля $a=xi+yj+\sqrt{x^2+y^2-1}\,k$ крізь зовнішню сторону однопорожнинного гіперболоїда $z=\sqrt{x^2-y^2+1}$, обмеженого площинами $z=0$, $z=\sqrt{3}$.
6. Знайти потік поля $a=(xy,yz,xz)$ крізь частину зовнішньої сторони сфери $x^2+y^2+z^2=1$, яка міститься у першому октанті.

Задачі для самостійної роботи

1. Знайти векторні лінії об'ємних та плоских полів:
   a. $a = xi + yj + zk$;
   b. $a = (z-y)i + (x-z)j + (y-x)k$;
   c. $a = xi + zk$;
   d. $a = 2zj + 4yk$.
2. Знайти векторні лінії поля $a = f(r)r$, де r - радіус-вектор точки, f - скалярна функція.
3. Обчислити потік векторного поля $a = xzi$ крізь зовнішній бік частини параболоїда $z = 1 - x^2 - y^2$, обмеженої знизу площиною $z = 0$.
4. Обчислити потік поля $a = yzi - xj - yk$ крізь частину поверхні конуса $x^2 + y^2 = z^2$, за умови $0 \le z \le 1$.
5. За допомогою формули проектування на всі три координатні площини обчислити потік векторного поля $a = zi - xj + yk$ крізь «верхній» бік трикутника, отриманого внаслідок перетину площини $3x + 6y - 2z - 6 = 0$ з координатними площинами.
6. За допомогою формули Гауса-Остроградського обчислити потік поля $a = xi + xzj + yk$ крізь замкнену поверхню S , що визначена співвідношеннями $x^2 + y^2 = 4 - z$, $z \ge 0$ та $z = 0$, $x^2 + y^2 \le 4$.

Тема 4. Дивергенція, вихор, потік

Основні поняття, формули та твердження, необхідні для розв'язування задач з теми

1. Потік векторного поля крізь поверхню.
2. Способи обчислення потоку векторного поля.
3. Дивергенція векторного поля.
4. Вихор векторного поля.
5. Формула Стокса обчислення потоку.

Задачі для аудиторної роботи

1. Обчислити потік вектора $a = 4xi - yj + zk$ крізь поверхню тора, центр ваги якого знаходиться у початку координат, віссю обертання є вісь Oz, з мінімальною відстанню від центра до тора R_1, та максимальною відстанню R_2.
2. Для якої функції $\psi(r)$ буде справедливою формула $div(\psi(r)\vec{r}) = 2\psi(r)$?
3. Знайти потік поля $a = xi + zk$ крізь поверхню $z = x^2 + y^2$, $z \le 4$.
4. Чи буде поле $a = x(z^2 - y^2)i + y(x^2 - z^2)j + z(y^2 - x^2)k$ соленоїдальним?
5. Знайти роботу плоского векторного поля сил $F = (x^2 + 2xy)i + (x^2 + y^2)j$ вздовж параболи $y = x^2$ від точки $(0,0)$ до точки $(1,1)$.
6. Обчислити криволінійний інтеграл векторного поля $a = (y^2 - z^2)i + 2yzj - x^2k$ вздовж кривої $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$, $0 \le t \le 1$.
7. Знайти циркуляцію поля $a = (xz + y)i + (yz - x)j - (x^2 - y^2)k$ вздовж лінії $x^2 + y^2 = 1$, $z = 3$, при обході додатного напрямку осі Oz проти годинникової стрілки.
8. Нехай a, b - сталі вектори. Довести, що тоді $\mathrm{rot}((r,a)b) = [a,b]$.
9. Нехай a - сталий вектор. Довести, що $rot(r\,a) = \dfrac{[\vec{r}, a]}{r}$.

Задачі для самостійної роботи

1. Для якої функції $\psi(z)$ дивергенція поля $a = xi + yj + \psi(z)k$ буде дорівнювати z?
2. Знайти потоки векторних полів крізь вказані замкнені поверхні
   a. $a = 2xi + 2yj - zk$,

b. $S = \left[\begin{array}{l} z^2 = x^2 + y^2,\ 0 < z < H, \\ x^2 + y^2 \le H^2,\ z = H; \end{array} \right.$

c. $a = i - zj$,

d. $S = \left[\begin{array}{l} z = 6 - x^2 - y^2,\ z \ge 2 \\ z^2 = x^2 + y^2, 0 \le z \le 2. \end{array} \right.$

3. Чи буде поле $a = y^2 i - (x^2 + y^3) j + z(3y^2 + 1)k$ соленоїдальним?
4. Обчислити інтеграл вздовж півкола $x = R\cos t$, $y = R\sin t$, $0 \le t \le \pi$ у плоскому векторному полі $a = \dfrac{y^2 i - x^2 j}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.
5. Знайти роботу векторного поля $a = yi + zj + xk$ вздовж витка гвинтової лінії $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$, $0 \le t \le 2\pi$.
6. Знайти циркуляцію поля $a = (2x + z)i + (2y - z)j + xyzk$ вздовж кривої L, утвореної лініями перетину параболоїда $x^2 + y^2 = 1 - z$ з координатними площинами у їх перших квадрантах.
7. Довести, що векторне поле $a = f(r)\vec{r}$ безвихрове.
8. Використовуючи теорему Стокса, знайти циркуляцію векторного поля $a = z^2 j$ по кривій, утвореній перетином сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ з координатними площинами у їх перших квадрантах.

Тема 5. Основні диференціальні операції у циліндричних та сферичних координатах

Основні поняття, формули та твердження, необхідні для розв'язування задач з теми

1. Криволінійні ортогональні координати.
2. Формули обчислення основних диференціальних операцій у криволінійних ортогональних координатах.

Задачі для аудиторної роботи

1. Записати вигляд операцій першого порядку та оператору Лапласа у випадку:
   a. циліндричних координат;
   b. сферичних координат.
2. Довести, що векторне поле $a = \frac{2\cos\theta}{r^3} e_r + \frac{\sin\theta}{r^3} e_\theta$ є потенціальним.
3. Довести, що векторне поле $a = f(r) e_r$, де f - довільна диференційована функція, потенціальне у циліндричній та сферичній системі.
4. Знайти потік векторного поля, визначеного у циліндричних координатах, $a = re_r - \cos\varphi e_\varphi + ze_z$, крізь замкнену поверхню, утворену циліндром $r = 2$ та площинами $z = 0$ та $z = 2$, у напрямку зовнішньої нормалі.
5. Знайти потік векторного поля, визначеного у сферичних координатах, $a = \frac{1}{r^2} e_r$, крізь деяку замкнену поверхню, яка оточує початок координат у напрямку зовнішньої нормалі.
6. Довести, що векторне поле $a = re_r + \frac{\varphi}{r} e_\varphi + ze_z$, визначене у циліндричних координатах, є потенціальним, та знайти його потенціал.
7. Знайти усі можливі гармонічні функції, які у сферичній системі координат:
   a. залежать лише від θ;
   b. залежать лише від φ.
8. Знайти потік векторного поля, визначеного у сферичних координатах, $a = r^2 e_r + R^2 \cos\varphi e_\varphi$ крізь сферу $r = R$.
9. Знайти потік векторного поля, визначеного у сферичних координатах, $a = re_r$, крізь замкнену поверхню, обмежену верхньою півсферою радіуса R та площиною $\theta = 0$.

Задачі для самостійної роботи

1. Записати вигляд операцій першого порядку та оператора Лапласа у випадку
   a. еліптичних координат $x = c\lambda\mu$, $y = c\sqrt{(\lambda^2 - 1)(1 - \mu^2)}$, $z = z$, де c – масштабний множник;
   b. параболічних координат $\lambda = \sqrt{2r}\sin\dfrac{\varphi}{2}$, $\mu = \sqrt{2r}\cos\dfrac{\varphi}{2}$, $z = z$.
2. Знайти потік векторного поля, визначеного у циліндричних координатах, $a = re_r + r\varphi e_\varphi - 2ze_z$ крізь замкнену поверхню, утворену циліндром $r = 1$, півплощинами $\varphi = 0$ та $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$, та площинами $z = 0$ та $z = 1$, у напрямку зовнішньої нормалі.
3. Знайти потік вектора, визначеного у сферичних координатах, $a = re_r + r\sin\theta - 3r\varphi\sin\theta e_\varphi$, крізь замкнену поверхню, обмежену верхньою на півсферою радіусу R, та площиною $\theta = 0$.
4. Переконатись, що векторне поле, визначене у циліндричних координатах, $a = e_r + \dfrac{1}{r}e_\varphi + e_z$, є потенціальним, та знайти його потенціал.
5. Встановити, що поле, визначене у сферичних координатах, $a = \theta e_r + e_\theta$, є потенціальним та знайти його потенціал.

Тема 6. Гідромеханічне тлумачення аналітичних функцій. Застосування конформних відображень

Основні поняття, формули та твердження, необхідні для розв’язування задач з теми

1. Комплексний потенціал.

2. Лінії течії та лінії сталого потенціалу плоского потенціального поля.
3. Основні властивості дробово-лінійних відображень.
4. Обчислення інтегралів від функції комплексної змінної.
5. Класифікація ізольованих особливих точок для аналітичних функцій.
6. Основні властивості степеневих відображень, експоненти.

Задачі для аудиторної роботи

1. Дати гідромеханічне тлумачення полів, породжених комплексними потенціалами. Зобразити лінії течії та лінії сталого потенціалу:
   a. $f(z) = \mathrm{Ln}\, z$;
   b. $f(z) = \mathrm{Ln}\dfrac{1}{z}$;
   c. $f(z) = -i\,\mathrm{Ln}\, z$;
   d. $f(z) = \dfrac{P - iC}{2\pi}\mathrm{Ln}\, z$;
   e. $f(z) = \dfrac{P}{2\pi}\mathrm{Ln}\dfrac{z-a}{z-b}$;
   f. $f(z) = -\dfrac{iC}{2\pi}\mathrm{Ln}\dfrac{z-a}{z-b}$;
2. Розглянути границю послідовності полів $f(z) = \dfrac{P - iC}{2\pi}\mathrm{Ln}\dfrac{z-a}{z-b}$ при $b \to a$, якщо відомо, що $(P - iC)(b - a)$ прямує до обмеженої комплексної величини, відмінної від 0.
3. Знайти лінії течії рідини в областях, якщо при конформному відображенні цих областей на верхню півплощину ми отримуємо горизонтальні лінії течії:
   a. $\{\mathrm{Im}\, z > 0, |z| > 1\}$;
   b. $\{\mathrm{Im}\, z > 0\} \setminus [0, i]$;
   c. $\{0 < \arg z < \alpha\}$;

d. $\{mz > 0\} \setminus [i, +i\infty]$;

e. $C \setminus ([-\infty, -1] \bigcup [1, +\infty])$.

Тема 7. Елементи теорії потенціалів

Основні поняття, формули та твердження, необхідні для розв'язування задач з теми

1. Потенціальне поле. Поняття потенціалу поля.
2. Геометричний зміст об'ємного (просторового) потенціалу.
3. Геометричний зміст потенціалу простого шару.
4. Геометричний зміст потенціалу подвійного шару.
5. Основні властивості об'ємного (просторового) потенціалу, потенціалу простого шару та потенціалу подвійного шару.

Задачі для аудиторної роботи

1. Знайти потенціал поля, створюваного кулею з центром у точці (x, y, z) радіуса R, якщо куля виконана з однорідної речовини зі щільністю ρ.
2. Знайти гравітаційну аномалію, створену кулею надлишкової маси M, центр якої розташований на глибині h по відношенню до горизонтальної земної поверхні.
3. Знайти потенціал та гравітаційну аномалію у плоскому ортогональному перерізі площиною Oxz, що породжені тілом форми прямокутного виступу $\{x > d, y \in R, -H < z < -h\}$, складеного з однорідного матеріалу надлишкової щільності ρ.

Задачі для самостійної роботи

1. Знайти потенціал поля, створеного простим шаром з поверхневою щільністю ρ на кулі з центром у точці (x, y, z) радіусу R.
2. Знайти потенціал поля, створеного подвійним шаром з поверхневою щільністю ρ на кулі з центром у точці (x, y, z) радіусу R.

Список літератури

1. Грищенко Ю.О., Нагнибіда М.І., Настасієв П.П. Теорія функцій комплексної змінної. Розв’язування задач. – К.: Вища школа, 1994. – 375 с.
2. Краснов М.Л., Киселев А.Н., Макаренко Т.Н. Векторный анализ. – М., Наука, 1978.
3. Ландау А.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. – М. Физматгиз, 1962.
4. Мышкис А.Д. Математика. Специальные курсы. – М. Наука, 1971.
5. Романовский М.Л. Ряды Фурье. Теория поля. Аналитические и специальные функции. Преобразование Лапласа. – М. Наука, 1973.
6. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1966. – 724 с.

Зміст