КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

УЗАГАЛЬНЕНІ ФУНКЦІЇ
У МАТЕМАТИЧНІЙ ФІЗИЦІ

НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ

КИЇВський ВПЦ УНІВЕРСИТЕТ
2008

Рецензенти:
д-р фіз.-мат. наук, проф. В.І. Герасименко
д-р фіз.-мат. наук, проф. А.Г. Нікітін
канд. фіз.-мат. наук, доц. О.В. Капустян

Рекомендовано до друку вченою радою механіко-математичного факультету (протокол № 5 від 10 грудня 2007 року)

Узагальнені функції в математичній фізиці. Навчально-методичні вказівки до практичних занять / Упорядник І.Б. Романенко. – К.: Видавничо-поліграфічний центр “Київський Університет”, 2008. – 18 с.

Подано теми практичних занять та перелік задач для аудиторних занять і самостійної роботи студентів з курсу “Узагальнені функції в математичній фізиці”.

Для студентів механіко-математичного факультету.

Тема 1. Простір основних функцій

Основні поняття, формули та твердження, необхідні для розв'язування задач з теми

1. Означення основної функції.
2. Простір основних функцій. Збіжність у просторі основних функцій.

Задачі для аудиторної роботи

1. Нехай $\varphi \in D(R^n)$ з'ясувати, чи будуть послідовності збіжними в $D(R^n)$:
   a. $\frac{1}{k}\varphi(x)$;
   b. $\frac{1}{k}\varphi(kx)$;
   c. $\frac{1}{k}\varphi\left(\frac{x}{k}\right)$.
2. Нехай $n=1$. Довести, що функція
$$\eta(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\chi_{[-2\varepsilon,2\varepsilon]}(y)\omega_{\varepsilon}(x-y)dy\,,$$
   де $\omega_e(x)$ - функція «шапочка», буде основною, причому для усіх x $0\le\eta(x)\le 1$, при $x\in[-\varepsilon,\varepsilon]$ $\eta(x)=1$, а при $|x|\ge 3\varepsilon$ $\eta(x)=0$.
3. Нехай $\varphi,\eta\in D(R)$ і $\eta\equiv 1$ в околі $x=0$. Довести, що функція
$$\psi(x)=\frac{1}{x^m}\left[\varphi(x)-\eta(x)\sum_{k=0}^{m-1}\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}x^k\right]$$
   для натурального m - основна.
4. Довести, що функцію $\varphi\in D(R)$ можна подати у вигляді похідної деякої основної функції тоді й лише тоді, коли

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)dx = 0.$$

5. Показати, що довільну функцію $\varphi \in D(R)$ можна подати у вигляді

$$\varphi(x) = \varphi_0(x)\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)dx + \varphi_1{}'(x),$$

де $\varphi_0, \varphi_1 \in D(R)$ і $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_0(x)dx = 1$.

6. Довести, що $D(R^n) \subset S(R^n)$ і зі збіжності в $D(R^n)$ випливає збіжність в $S(R^n)$.
7. Перевірити, чи будуть вказані послідовності збіжними в $S(R^n)$:
   a. $\frac{1}{k}\varphi(x)$;
   b. $\frac{1}{k}\varphi(kx)$;
   c. $\frac{1}{k}\varphi\left(\frac{x}{k}\right)$.

Задачі для самостійної роботи

1. Нехай неперервна функція f фінітна, тобто $f(x) \equiv 0, |x| > R$. Довести, що для $\varepsilon > 0$ функція
$$f_\varepsilon(x) = \int_{R^n} f(y)\omega_\varepsilon(x-y)dy$$
буде основною, причому $f_\varepsilon \equiv 0$ при $|x| > R + \varepsilon$ і $f_\varepsilon \rightrightarrows f$ по $x \in R^n$ при $\varepsilon \to 0$.
2. Нехай $\varphi, \eta \in D(R)$ та $\eta \equiv 1$ в околі точки $x = 0$. Довести, що функція $\psi(x) = \dfrac{\varphi(x) - \eta(x)\varphi(0)}{\alpha(x)}$ буде основною,

якщо $\alpha \in C^{\infty}(R)$ та має єдиний нуль 1-го порядку у точці 0.

Тема 2. Регулярні та сингулярні узагальнені функції. Збіжність узагальнених функцій

Основні поняття, формули та твердження, необхідні для розв'язування задач з теми

1. Поняття узагальненої функції.
2. Збіжність узагальнених функцій.
3. Поняття регулярної та сингулярної узагальненої функції.

Задачі для аудиторної роботи

1. Довести, що $\delta(x)$ - сингулярна узагальнена функція.
2. Знайти носії узагальнених функцій:
   a. $\delta(x-x_0)$;
   b. $\mu(x)\delta_S(x)$, де $\mu \in C(S)$ і $(\mu\delta_S, \varphi) = \int\limits_S \mu(x)\varphi(x)dS$;
   c. $\delta_{S_{R_1}(0)}(x-x_1) + \delta_{S_{R_2}(0)}(x-x_2)$.
3. Довести, що $\delta_{S_R(0)}(x) \to 0$ при $R \to \infty$ у $D'(R^n)$.
4. Довести, що функціонал $P\dfrac{1}{x}$, який діє за формулою
$$\left(P\frac{1}{x}, \varphi\right) = \text{v.p.}\int\limits_R \frac{\varphi(x)}{x}dx = \lim_{\varepsilon\to\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int\limits_{\varepsilon}^{+\infty}\right)\frac{\varphi(x)}{x}dx$$, буде сингулярною узагальненою функцією.
5. Обчислити границі у $D'(R)$ для послідовностей при $\varepsilon \to 0$:
   a. $\begin{cases} \dfrac{1}{2\varepsilon}, |x| \le \varepsilon, \\ 0, |x| > \varepsilon \end{cases}$;

b. $\dfrac{1}{2\sqrt{\pi\varepsilon}} e^{-\frac{|x|^2}{4\varepsilon}}$;

c. $\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{x}{\varepsilon}$.

6. Довести, що ряд $\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \delta(x-k)$ збігається у $D'(R)$ для довільних a_k.
7. Знайти границю послідовності узагальнених функцій $P\dfrac{\cos kx}{x}$ при $k \to \infty$ у $D'(R)$, де $\left(P\dfrac{\cos kx}{x}, \varphi\right) = \text{v.p.}\int\limits_R \dfrac{\cos kx}{x}\varphi(x)dx$.

Задачі для самостійної роботи

1. Знайти носії узагальнених функцій:

a. $\sum\limits_{k=1}^{m} m_k \delta(x-x_k)$;

b. $|x|\,\delta_{S_R(0)}(x-x_0)$.

2. Обчислити границі у $D'(R)$ для послідовностей при $\varepsilon \to 0$:

c. $\dfrac{\varepsilon}{\pi(x^2+\varepsilon^2)}$;

d. $\dfrac{\varepsilon}{\pi x^2}\sin^2\dfrac{x}{\varepsilon}$.

3. Довести, що функціонал $P\dfrac{1}{x^2}$, який діє за формулою $\left(P\dfrac{1}{x^2}, \varphi\right) = \text{v.p.}\int\limits_R \dfrac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x^2}dx$, буде сингулярною узагальненою функцією.

Тема 3. Диференціювання узагальнених функцій

Основні поняття, формули та твердження, необхідні для розв’язування задач з теми

1. Правило множення узагальненої функції на нескінченно диференційовану функцію.
2. Правило диференціювання узагальнених функцій.
3. Правило заміни аргументу в узагальненій функції.

Задачі для аудиторної роботи

1. Довести формули:
   a. $\rho(x)\delta'(x) = -\rho'(0)\delta(x) + \rho(0)\delta'(x)$, де $\rho \in C^1(R)$;
   b. $x\delta^{(m)}(x) = -m\delta^{(m-1)}(x)$, $m \geq 1$;
   c. $x^m\delta^{(m)} = (-1)^m m!\delta(x)$, $m \geq 0$;
   d. $x^k\delta^{(m)}(x) = 0$, $m = \overline{0, k-1}$.
2. Обчислити похідні:
   a. $(\theta(-x))'$;
   b. $(\theta(x - x_0))^{(m)}$;
   c. $(\theta(x_0 - x))^{(m)}$;
   d. $(\theta(x)\sin x)'$;
   e. $(\theta(x)\cos x)'$;
   f. $(\theta(x)e^{ax})^{(m)}$.
3. Довести, що узагальнені функції δ, δ', δ'', … $\delta^{(m)}$ лінійно незалежні.
4. Довести, що $\dfrac{d}{dx}\ln|x| = P\dfrac{1}{x}$.
5. Знайти похідні довільного порядку для узагальнених функцій
   a. $\operatorname{sign}\cos x$;
   b. $\operatorname{sign}\sin x$.

6. Нехай функція $f \in C^1((-\infty, x_0])$, $f \in C^1([x_0+,+\infty))$, а у точці x_0 функція f має розрив першого роду. Довести, що похідна від регулярної узагальненої функції, яка відповідає f, може бути знайдена за формулою
$$f' = \{f'\} + [f]_{x_0} \delta(x - x_0)$$
де $\{f'\}$ - регулярна функція, яка виникає внаслідок поточкового диференціювання функції f, $[f]_{x_0} = f(x_0+) - f(x_0-)$.
7. Знайти усі похідні функцій:
   a. $y = \begin{cases} x^2, |x| \le 1, \\ 0, |x| > 1; \end{cases}$
   b. $y = \begin{cases} \sin x, |x| \le \pi, \\ 0, |x| > \pi. \end{cases}$

Задачі для самостійної роботи

1. Довести формули диференціювання:
   a. $\alpha(x)\delta^{(m)}(x) = \sum_{j=0}^{m} (-1)^{j+m} C_m^j \alpha^{(m-j)}(0)\delta^{(j)}(x)$,
      де $\alpha \in C^\infty(R)$;
   b. $\theta' = \delta$, де $\theta(x) = \begin{cases} 1, x \ge 0, \\ 0, x < 0; \end{cases}$
   c. $(\rho(x)\theta(x))' = \rho(0)\delta(x) + \rho'(x)\theta(x)$.
2. Обчислити
   a. $(\operatorname{sign} x)^{(m)}$;
   b. $(x \operatorname{sign} x)'$;
   c. $(|x|)^{(m)}$;
   d. $\left(\theta(x)x^{m+k}\right)^{(m)}$;
   e. $\left(\theta(x)x^{m-k}\right)^{(m)}$, $m \ge 1$, $k = \overline{1,m}$.
3. Знайти похідні першого, другого і третього порядку:

a. $y = |x| \sin x$;

b. $y = |x| \cos x$.

4. Нехай функція має розриви першого роду у точках $\{x_k\}_{k \geq 1}$, а у решті точок – неперервно диференційована, і похідна f' є інтегрованою. Довести, що похідна від регулярної узагальненої функції, яка відповідає f, може бути знайдена за формулою

$$f' = \{f'\} + \sum_{k \geq 1} [f]_{x_k} \delta(x - x_k)$$

де $\{f'\}$ - регулярна функція, яка виникає внаслідок поточкового диференціювання функції f, $[f]_{x_k} = f(x_k +) - f(x_k -)$.

5. Знайти похідні довільного порядку від узагальнених функцій

a. $\theta(a - |x|)$, $a > 0$;

b. $[x]$.

Тема 4. Розв'язання найпростіших алгебраїчних та диференціальних рівнянь з узагальненими функціями

Задачі для аудиторної роботи

1. Знайти загальні розв'язки у $D'(R)$:

a. $xy = 0$;

b. $(x-1)y = 0$;

c. $x(x-1)y = 0$;

d. $xy = 1$;

e. $xy = P\frac{1}{x}$;

f. $x^n y = 0$, $n \geq 1$;

g. $(\cos x) y = 0$.

2. Знайти загальні розв'язки у $D'(R)$:

a. $y'=0$;

b. $y^{(m)}=0$, $m\geq 2$.

3. Довести, що загальним розв'язком у $D'(R)$ для рівняння $x^n y^{(m)}=0$ ($n>m$) буде узагальнена функція

$$y=\sum_{k=0}^{m-1} a\theta(x)x^{m-k-1}+\sum_{k=m}^{n-1} b_k\delta^{(k-m)}(x)+\sum_{k=0}^{m-1} c_k x^k .$$

4. Знайти загальні розв'язки у $D'(R)$:

a. $xy'=1$;

b. $xy'=P\dfrac{1}{x}$;

c. $x^2y'=0$;

d. $x^2y'=1$.

5. Знайти розв'язок рівняння у $D'(R)$:

$$ay''+by'+cy=m\delta+n\delta'.$$

a,b,c,m,n – фіксовані числа. Розглянути випадки

a. $a=c=n=1$, $b=m=2$;

b. $b=n=0$, $a=m=1$, $c=4$;

c. $b=0$, $a=n=1$, $m=2$, $c=-4$.

Задачі для самостійної роботи

1. Знайти загальні розв'язки у $D'(R)$:

a. $\alpha(x)y=0$, де $\alpha\in C^\infty(R)$, і має скінченну кількість нулів першого порядку x_1, x_2, … x_n;

b. $\alpha(x)y=0$, де $\alpha\in C^\infty(R)$ і додатна на R;

c. $(x^2-1)y=0$;

d. $x^2y=2$;

e. $(x+1)^2y=0$.

2. Знати загальний розв'язок у $D'(R)$ для рівняння $x^n y^{(m)}=0$ ($n\leq m$).

3. Знайти загальні розв'язки у $D'(R)$:
   a. $(x+1)y''=0$;
   b. $(x+1)^2 y''=0$;
   c. $(x+1)y'''=0$.
4. Довести, що якщо $f \in D'(R)$ має властивість $f(x+h)=f(x)$ для довільного h, то f - стала.

Тема 5. Згортка узагальнених функцій

Основні поняття, формули та твердження, необхідні для розв'язування задач з теми

1. Обчислення згортки локально інтегрованих функцій. Достатні умови існування згортки локально інтегрованих функцій.
2. Обчислення згортки двох узагальнених функцій.
3. Теорема про достатні умови існування згортки двох узагальнених функцій.
4. Інтеграл Пуасона.
5. Теорема Коші про лишки.

Задачі для аудиторної роботи

1. Знайти у $D'(R)$:
   a. $\delta(x-a) * f$;
   b. $\delta(x-a) * \delta(x-b)$;
   c. $\theta(x) * \theta(x)$;
   d. $\theta(x) * \theta(x)x^2$;
   e. $e^{-|x|} * e^{-|x|}$;
   f. $e^{-ax^2} * e^{-ax^2}$, $a>0$.
2. Нехай $f_\alpha(x)=\dfrac{1}{\alpha\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2\alpha^2}}$, $\alpha>0$. Довести, що $f_a * f_\beta = f_{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$.

3. Нехай $f_\alpha(x)=\dfrac{\alpha}{\pi(x^2+\alpha^2)}$, $\alpha>0$. Довести, що $f_\alpha * f_\beta = f_{\alpha+\beta}$.
4. Нехай $f\in D'(R^n)$, $\varphi\in D(R^n)$. Довести, що $f*\varphi=(f(y),\varphi(x-y))$ і $f*\varphi\in C^\infty(R^n)$.
5. Довести, що якщо існує згортка $f*1$, то вона стала.

Задачі для самостійної роботи

1. Знайти у $D'(R)$:
   a. $\delta^{(m)}*f$;
   b. $\delta^{(m)}(x-a)*f$;
   c. $(\theta(x)x^2)*(\theta(x)\sin x)$;
   d. $(\theta(x)\cos x)*(\theta(x)x^3)$;
   e. $(\theta(x)\operatorname{sh} x)*(\theta(x)\sin x)$;
   f. $\theta(a-|x|)*\theta(a-|x|)$.

Тема 6. Згортка узагальнених функцій (продовження)

Задачі для аудиторної роботи

1. Довести, що розв’язком рівняння $L\delta*u=\delta$, де $L=\dfrac{d^m}{dx^m}+a_1(x)\dfrac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}+\ldots+a_{m-1}(x)\dfrac{d}{dx}+a_m(x)$ з $a_k\in C^\infty(R)$ у $D'(R)$ є функція вигляду $a=Z(x)\theta(x)$, де $Lz=0$, $Z(0)=Z'(0)=\ldots Z^{(m-2)}(0)$, $Z^{(m-1)}(0)=1$.
2. Довести, що розв’язком рівняння $(\cos x\theta(x))*y=g$ в $D'(R)$, де $g\in C^1(x\ge 0)$, $g\equiv 0$ при $x<0$ буде функція
$$y(x)=g'(x)+\theta(x)\int_0^x g(\xi)d\xi .$$
3. Нехай $f\in D'(R^{n+1})$. Довести, що

a. $[\delta(x-x_0)\delta(t)]*f(t,x)=f(x-x_0,t)$;

b. $[\delta(x-x_0)\delta^{(m)}(t)]*f(t,x)=\dfrac{\partial^m f(x-x_0,t)}{dt^m}$.

4. Обчислити згортки у $D'(R^n)$:

a. $f*\delta_{S_R(0)}$, де f — неперервна в R^n, а $\delta_{S_R(0)}$ - функціонал простого шару на сфері $S_R(0)$ зі щільністю 1;

b. $e^{-|x|^2}*\delta_{S_R(0)}$ при $n=3$;

c. $\dfrac{1}{1+|x|^2}*\delta_{S_R(0)}$ при $n=3$.

5. Обчислити згортки у $D'(R^2)$:

a. $(x\theta(t))*(\theta(x)t)$;

b. $\theta(t-|x|)*\theta(t-|x|)$.

c. $\theta(at-|x|)*[\delta(x)\cdot\omega(t)]$, $a>0$, де $\omega\in C(t\geq 0)$, $\omega\equiv 0$ при $t=0$;

Задачі для самостійної роботи

1. Обчислити згортки у $D'(R^n)$:

a. $f*\dfrac{\partial}{\partial n}\delta_{S_R(0)}$;

b. $|x|^2*\delta_{S_R(0)}$ при $n=3$;

c. $\sin|x|^2*\delta_{S_R(0)}$ при $n=3$;

2. Обчислити згортки у $D'(R^2)$:

a. $\theta(at-|x|)*[\delta(x)\cdot\theta(t)]$;

b. $\theta(at-|x|)*\dfrac{\partial}{\partial t}[\delta(x)\cdot\theta(t)]$;

c. $\theta(at-|x|)*[\delta'(x)\cdot\theta(t)]$.

Тема 7. Перетворення Фур’є узагальнених функцій

Основні поняття, формули та твердження, необхідні для розв’язування задач з теми

1. Формула перетворення Фур’є для інтегрованих функцій.
2. Перетворення Фур’є від узагальнених функцій повільного зростання.
3. Теорема Коші для аналітичних функцій.
4. Інтеграл Пуасона.
5. Теорема Коші про лишки.

Задачі для аудиторної роботи

1. Знайти перетворення Фур’є від функцій
   a. $\delta(x-x_0)$;
   b. $\delta(x)$;
   c. 1;
   d. $\dfrac{\delta(x-x_0)+\delta(x+x_0)}{2}$;
   e. $\dfrac{\delta(x-x_0)-\delta(x+x_0)}{2i}$;
   f. $D^{\alpha}\delta$;
   g. x^{α}.
2. Обчислити перетворення Фур’є від таких функцій:
   a. $e^{-a^2x^2}$;
   b. e^{ix^2};
   c. $[x]\theta(x)$.
3. Обчислити перетворення Фур’є від таких функцій:
   a. $\theta(x)e^{-ax}$, $a>0$;
   b. $\dfrac{2a}{x^2+a^2}$, $a>0$.

Задачі для самостійної роботи

1. Обчислити перетворення Фур'є від таких функцій:
   a. $\theta(R-|x|)$;
   b. e^{-ix^2}.
2. Обчислити перетворення Фур'є від таких функцій:
   a. $\theta(-x)e^{ax}$, $a>0$;
   b. $e^{-a|x|}$, $a>0$;
3. Обчислити перетворення Фур'є від таких функцій ($n=1$):
   a. $\theta(x-a)$;
   b. $\operatorname{sign} x$;
   c. $P\dfrac{1}{x}$;
   d. $|x|$;
   e. $x^k\theta(x)$;
   f. $|x|^k$.

Тема 8. Фундаментальні розв'язки диференціальних операторів та їх застосування

Основні поняття, формули та твердження, необхідні для розв'язування задач з теми

1. Поняття узагальненого розв'язку диференціального рівняння.
2. Поняття фундаментального розв'язку диференціального рівняння.
3. Теорема про застосування фундаментального розв'язку.
4. Метод спуску пошуку фундаментального розв'язку.

Задачі для аудиторної роботи

1. Знайти фундаментальний розв'язок операторів
   a. $\dfrac{d^2}{dx^2}+4\dfrac{d}{dx}$;

b. $\frac{d^4}{dx^4}-2\frac{d^2}{dx^2}+1$.

2. Довести, що $\mathrm{E}(x,y,z)=-\frac{1}{4\pi r}$ - фундаментальний розв’язок оператора Лапласа в R^3.
3. Побудувати узагальнену задачу Коші для хвильового рівняння.
4. Знайти розв’язок задачі Коші для хвильового рівняння у випадках
   a. $n=3$;
   b. $n=2$;
   c. $n=1$.
5. Побудувати узагальнену задачу Коші для рівняння теплообміну.
6. Знайти розв’язок задачі Коші для рівняння теплообміну.

Задачі для самостійної роботи

1. Знайти фундаментальний розв’язок операторів
   a. $\frac{d^3}{dx^3}-a^3$;
   b. $\frac{d^2}{dx^2}-4\frac{d}{dx}+5$.
2. Довести, що $\mathrm{E}(x,y)=\frac{1}{2\pi}\ln r$ - фундаментальний розв’язок оператора Лапласа в R^2.
3. Довести, що $\mathrm{E}(x,y)=\frac{1}{\pi z}=\frac{1}{\pi(x+iy)}$ - фундаментальний розв’язок оператора Коші-Рімана $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)$.

Список літератури

1. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1981. – 512 с.
2. Владимиров В.С. Сборник задач по уравнениям математической физики. – М.: Наука, 1974. – 271 с.

Зміст