КИЇВСЬКИЙ
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

ПРОСТОРИ СОБОЛЄВА ТА УЗАГАЛЬНЕНІ РОЗВ'ЯЗКИ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

Методичні вказівки до самостійної роботи
із спеціального курсу

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

ПРОСТОРИ СОБОЛЄВА ТА УЗАГАЛЬНЕНІ РОЗВ'ЯЗКИ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

Методичні вказівки до самостійної роботи із спеціального курсу

для студентів механіко–математичного факультету четвертого курсу

КИЇВСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ 2005

Рецензенти:

д-р фіз.–мат. наук, проф. В.А. Михайлець,
канд. фіз.–мат. наук, доц. А.В. Ловєйкін

Затверджено вченою радою механіко-математичного факультету (протокол № 13 від 30 червня 2005 року)

Простори Соболєва та узагальнені розв'язки задач математичної фізики: Методичні вказівки до самостійної роботи з спеціального курсу для студентів механіко–математичного факультету четвертого курсу / Упоряд. Т.А. Мельник. – К.: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет". – 2005. – 18 с.

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

В цьому методичному посібнику наведені умови задач для самостійного розв'язання із спеціального курсу "Простори Соболєва та узагальнені розв'язки задач математичної фізики", який читався автором на протязі декількох років для студентів спеціальності "математика" механіко- математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Зміст задач і розміщення матеріалу узгоджені із змістом лекцій і відповідають навчальній програмі з даного курсу.

Головна мета даного посібника — самостійне засвоєння студентами основних понять і положень курсу, набуття навичок їх застосування до розв'язання стандартних задач, опанування деяких спеціальних методів.

В посібнику також вміщено програму курсу "Простори Соболєва та узагальнені розв'язки задач математичної фізики" для студентів спеціальності "математика" четвертого курсу.

При підборі задач використано такі підручники:

В.П. Михайлов, Дифференциальные уравнения в частных производных. – М.: Наука, 1983.

Д. Гильбарт, Н. Трудингер, Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. – М.: Наука, 1989.

L.C. Evans, Partial differential equations. – Graduate Studies in Math., Vol. 19, American Mathematical Society, 1999.

Частина задач складена автором.

ТЕМА 1
УЗАГАЛЬНЕНІ ПОХІДНІ. ПРОСТОРИ СОБОЛЄВА

Контрольні запитання

1. *Означення узагальненої похідної.*
2. *Означення просторів Соболєва* $W^{k,p}(\Omega)$, $H^k(\Omega)$.

Задачі

1. Знайти узагальнені похідні таких функцій

$$u(x) = |x|, \ x \in (-1,1); \qquad u(x) = |x-2|+|x+2|-|x+4|, \ x \in \mathbb{R};$$

$$u(x) = \sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}}, \ \ x \in (1,+\infty).$$

2. Знайти узагальнені похідні першого порядку для функції $f(x) = |x_1|$ в кулі $B = \{x \in \mathbb{R}^n : \ |x| < 1\}$.

3. Довести, що функція $f(x) = \operatorname{sign} x_1$ в кулі $B = \{x \in \mathbb{R}^n : \ |x| < 1\}$ має узагальнені похідні $\partial_{x_i} f = 0$, $i = 2, 3, \dots, n$, однак не має узагальненої похідної по x_1.

4. Нехай існують узагальнені похідні порядку $|\alpha|$ для функцій u_1 та u_2. Довести, що існує узагальнена похідна порядку $|\alpha|$ для лінійної комбінації цих функцій і

$$D^\alpha\big(c_1u_1 + c_2u_2\big) = c_1D^\alpha u_1 + c_2D^\alpha u_2.$$

5. Довести, що узагальнена похідна не залежить від порядку диференціювання.

6. Вивести формулу диференціювання добутку двох функцій $u \in W^{1,p}(\Omega)$ і $v \in C^1(\Omega)$.

7. Нехай узагальнена похідна першого порядку для функції $f(x)$, $x \in (-1,1)$, рівна нулю. Довести, що $f = const$ майже скрізь на $(-1,1)$.

8. Нехай $\{f_m : \ m \in \mathbb{N}\} \subset C^1(\overline{\Omega})$ і $f_m \to f$ слабко в $L^2(\Omega)$ при $m \to +\infty$; послідовність $\{\partial_{x_i} f_m : \ m \in \mathbb{N}\}$ - обмежена в $L^2(\Omega)$. Довести, що функція f має узагальнену похідну $\partial_{x_i} f$.

9. Нехай $\{f_m : m \in \mathbb{N}\} \subset C^1(\overline{\Omega})$ і $f_m \to f$ слабко в $L^2(\Omega)$ при $m \to +\infty$; послідовності $\{\partial_{x_i} f_m : m \in \mathbb{N}\}$, $i = 1, 2, \dots, n$, - обмежені в $L^2(\Omega)$. Довести, що $f \in H^1(\Omega)$ і послідовність $f_m \to f$ сильно в $L^2(\Omega)$ при $m \to +\infty$.

10. Для яких $p \in [1, +\infty]$ наступні функції

$$u(x) = \sqrt[n]{|x|}, \quad x \in (-1, 1);$$

$$u(x) = |x-2| + |x+2| - |x+4|, \quad x \in \mathbb{R},$$

належать до простору $W^{1,p}$.

11. Нехай $\Omega = (-1, 1) \times (-1, 1)$;

$$u(x) = \begin{cases} 1 - x_1, & \text{якщо } x_1 > 0, \ |x_2| < x_1, \\ 1 + x_1, & \text{якщо } x_1 < 0, \ |x_2| < -x_1, \\ 1 - x_2, & \text{якщо } x_2 > 0, \ |x_1| < x_2, \\ 1 + x_2, & \text{якщо } x_2 < 0, \ |x_1| < -x_2. \end{cases}$$

Для яких $p \in [1, +\infty]$ функція $u \in W^{1,p}(\Omega)$?

12. Нехай $B := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$. При яких $q \in \mathbb{R}$ функції

$$|x|^q; \quad (\sin|x|)^q; \quad (\ln|x|)^q$$

належать до простору $H^1(B)$?

13. Довести, що норми

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \Big(\sum_{|\alpha| \le k} \int_\Omega |D^\alpha u|^p \, dx \Big)^{\frac{1}{p}}$$

та

$$\|u\|'_{W^{k,p}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \le k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}$$

в просторі $u \in W^{k,p}(\Omega)$, $p > 1$, є еквівалентними.

ТЕМА 2
АПРОКСИМАЦІЯ ГЛАДКИМИ ФУНКЦІЯМИ

Контрольні запитання

1. *Означення ядром усереднення його властивості.*
2. *Означення усередненою функцією для функції f.*
3. *Теореми про наближення функцій з просторів Соболєва гладкими функціями.*

Задачі

1. Нехай $f \in C(\overline{\Omega})$ і $f|_{\partial\Omega} = 0$. Довести, що

$$f^\varepsilon \overset{\overline{\Omega}}{\rightrightarrows} f \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0.$$

2. Нехай $f \in C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$. Довести, що для довільного компакту $K \subset \Omega$

$$[f^\varepsilon]_{C^{0,\gamma}(\overline{K})} \le [f]_{C^{0,\gamma}(\overline{K^\varepsilon})} \quad \text{і} \quad f^\varepsilon \to f \quad \text{в } C^{0,\gamma}_{loc}(\Omega) \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0.$$

3. Нехай $f \in C^1(\mathbb{R})$, $f' \in L^\infty(\mathbb{R})$ і $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Довести, що композиція $f \circ u \in W^{1,p}(\Omega)$ і $D(f \circ u) = f'(u) \cdot Du$. Тут $Du = \partial_{x_i} u$ для деякого значення $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

4. Нехай функції $u, v \in W^{1,1}(\Omega)$ такі, що $u \cdot v \in L^1_{loc}(\Omega)$, $u \cdot Dv + v \cdot Du \in L^1_{loc}(\Omega)$. Довести формулу диференціювання двох функцій: $D(uv) = u \cdot Dv + v \cdot Du$.

5. Нехай функція $y = \psi(x)$, $x \in \Omega$, взаємнооднозначно відображає область Ω на область $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^n$, причому $\psi \in C^1(\Omega)$ і обернене відображення $\psi^{-1} \in C^1(\mathcal{B})$. Довести, що якщо $u \in W^{1,1}(\Omega)$, то композиція $v := u \circ \psi^{-1} \in W^{1,p}(\mathcal{B})$ і

$$\partial_{x_i} u(x) = \sum_{j=1}^{n} \partial_{y_j} v(y) \frac{\partial y_j}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

6. Нехай функція $u \in W^{1,1}(\Omega)$. Визначимо додатну та від'ємну частини функції u таким чином $u^+ = \max\{u, 0\}$, $u^- = \min\{u, 0\}$. Очевидно, що $u = u^+ + u^-$ і $|u| = u^+ - u^-$. Довести, що $u^+, u^-, |u| \in W^{1,1}(\Omega)$ і

$$Du^+ = \begin{cases} Du, & \text{якщо } u > 0, \\ 0, & \text{якщо } u \leq 0; \end{cases} \qquad Du^- = \begin{cases} 0, & \text{якщо } u \geq 0, \\ Du, & \text{якщо } u < 0; \end{cases}$$

$$D|u| = \begin{cases} Du, & \text{якщо } u > 0, \\ 0, & \text{якщо } u = 0, \\ -Du, & \text{якщо } u < 0. \end{cases}$$

Вказівка: скористатись вправою 3 та фактом, що $u^+ = \lim_{\varepsilon \to 0} f_\varepsilon(u)$, де

$$f_\varepsilon(u) = \begin{cases} (u^2 + \varepsilon^2)^{1/2} - \varepsilon, & \text{якщо } u > 0, \\ 0, & \text{якщо } u \leq 0; \end{cases}$$

дивись також лему 7.6[1]

7. Нехай f - кусково-гладка функція на $\mathbb{R}$ і $f' \in L^\infty(\mathbb{R})$. Довести, що якщо $u \in W^{1,1}(\Omega)$, то композиція $f \circ u \in W^{1,1}(\Omega)$, і якщо L - множина точок злому функції f, то

$$D(f \circ u) = \begin{cases} f'(u)\, Du, & \text{якщо } u \notin L, \\ 0, & \text{якщо } u \leq 0. \end{cases}$$

Вказівка: дивись лему 7.8[1].

[1] Д. Гильбарт, Н. Трудингер *Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка*. - М.: Наука, 1989.

ТЕМА 3
ПРОДОВЖЕННЯ ФУНКЦІЙ З ПРОСТОРІВ СОБОЛЄВА

Контрольні запитання

1. *Теорема про продовження функцій з просторів Соболєва.*

Задачі

1. За формулами, які наведені в теоремі про продовження і в зауваженні до неї побудувати продовження функції $f(x) = x^2,\ x \in (0,2),$ з простору $H^k(0,2)$ в простір $H^k(-2,2),$ де $k = 1,2.$

   Довести нерівність

   $$\|Ef\|_{H^k(-2,2)} \le C\,\|f\|_{H^k(0,2)} \quad (k=1,\quad k=2)$$

   і знайти константу C. Переконатися, що вона не залежить від f.

   Побудувати графіки цих продовжень для $k = 1,2.$

2. Нехай для деякої області Ω можливе продовження функцій з простору $W^{1,p}(\Omega)$ в простір $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Довести, що простір $C^\infty(\overline{\Omega})$ є всюди щільним в $W^{1,p}(\Omega)$.

3. Довести, що слабка збіжність послідовності $\{u_m\}_{m=1}^\infty$ в просторі $H^k(\Omega)$ еквівалентна слабкій збіжності в $L^2(\Omega)$ послідовності функцій $\{u_m\}_{m=1}^\infty$ та послідовностей всіх узагальнених похідних $\{D^\alpha u_m\}_{m=1}^\infty,\ \ |\alpha| \le k.$

4. Довести, що для довільної функції $f \in H^k(K)$ (з $f \in C^k(K)$), де K – n-мірний куб, існує фінітне продовження $Ef \in H^k(V)$ ($Ef \in C^k(V)$), в більшу область V таку, що $\overline{K} \subset V$. Крім того, при такому продовжені має місце нерівність $\|Ef\|_{H^k(V)} \le C\,\|f\|_{H^k(K)}$, де константа C не залежить від f.

ТЕМА 4
ПРОСТОРИ СОБОЛЄВА $W^{k,p}(a,b)$ ТА $W_0^{k,p}(a,b)$

Контрольні запитання

1. *Означення просторів Соболєва* $W^{k,p}(a,b)$, $W_0^{k,p}(a,b)$, $H^1(a,b)$ *та* $H_0^1(a,b)$.
2. *Означення абсолютно неперервної функції.*
3. *Теорема Асколі-Арцела.*
4. *Означення компактного вкладення одного банахового простору в інший.*

Задачі

1. Знайти кут φ між елементами $u(x) = \sin x$ та $v(x) = x$ в просторі $H^1(0,\pi)$.
2. Довести, що вкладення $H^k(a,b) \subset C^{k-1}([a,b])$ - неперервне і компактне $(k \in \mathbb{N},\ k \geq 2)$.
3. Якщо $u \in W^{1,p}(0,1)\ \ (1 < p < +\infty)$, тоді
$$|u(x) - u(y)| \leq |x-y|^{1-\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |u'|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} \quad \forall \text{ м.в. } x,\ y \in [0,1].$$
4. Довести, що $W^{1,p}(0,1) \subset C([0,1])\ \ (1 \leq p < +\infty)$, причому дане вкладення є неперервним.
5. Довести, що кожна функція $u \in W^{1,p}(0,1)\ \ (1 \leq p < +\infty)$ співпадає майже скрізь з абсолютно неперервною функцією.
6. Довести, що вкладення $W^{1,p}(0,1) \subset C([0,1])\ \ (1 < p < +\infty)$ - компактне.
7. Показати, що функція Кантора є неперервна, неспадна і її похідна майже скрізь рівна нулю, але вона не є абсолютно неперервною функцією. Вказівка: дивись підручник[1].

[1] А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин, Элементы теории функций и функционального анализа // М.: Наука, 1981 (розділ 6, §4)

ТЕМА 5
ОПЕРАТОР СЛІДУ

Контрольні запитання

1. *Означення сліду функції з простору $W^{1,p}(\Omega)$ на межу $\partial\Omega$.*
2. *Теорема про слід функції з простору $W^{1,p}(\Omega)$.*

Задачі

В наступних задачах область Ω є обмеженою областю в $\mathbb{R}^n$ і $\partial\Omega \in C^1$.

1. Довести, що не існує лінійного обмеженого оператора $T : L^p(\Omega) \mapsto L^p(\partial\Omega)$ такого, що $Tu = u_{|\partial\Omega}$, якщо $u \in C(\overline{\Omega}) \cap L^p(\Omega)$.

2. Нехай $u \in W^{1,p}(\Omega),\ \ v \in W^{1,q}(\Omega)\ \ (1 \le p < +\infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$. Довести формулу інтегрування частинами для функцій u, v :
$$\int_\Omega \partial_{x_i} u(x) \cdot v(x)\, dx = \int_{\partial\Omega} T(u)T(v)\nu_i(x)\, dS_x - \int_\Omega u(x) \cdot \partial_{x_i} v(x)\, dx,$$
де $T(u)$ - слід функції u; ν_i— i-та компонента зовнішньої одиничної нормалі ν до $\partial\Omega$.

3. Нехай $u \in H^2(\Omega),\ \ v \in H^1(\Omega)$. Довести першу формулу Гріна-Остроградського
$$\int_\Omega v(x)\,\Delta u(x)\, dx = \int_{\partial\Omega} T(v)T(\partial_\nu u)\, dS_x - \int_\Omega \nabla v(x) \cdot \nabla u(x)\, dx,$$
де $\partial_\nu u := \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} u(x)\nu_i(x)$ - похідна по нормалі ν до $\partial\Omega$.

4. Нехай $u \in H^2(\Omega),\ \ v \in H^2(\Omega)$. Довести другу формулу Гріна-Остроградського
$$\int_\Omega \big(v\,\Delta u\ -\ u\,\Delta v\big)\, dx = \int_{\partial\Omega} \big(T(v)T(\partial_\nu u)\ -\ T(u)T(\partial_\nu v)\big)\, dS_x$$
де $\partial_\nu u := \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} u(x)\nu_i(x)$ - похідна по нормалі ν до $\partial\Omega$.

ТЕМА 6
ТЕОРЕМИ ВКЛАДЕННЯ

Контрольні запитання

1. *Теорема Гагліардо-Ніренберга-Соболєва та наслідки з неї.*

2. *Теорема Moppi та наслідки з неї.*

Задачі

1. Нехай Ω - обмежена область в $\mathbb{R}^n$, $\partial\Omega \in C^1$; $p \in [1, n)$. Довести, що величина
$$\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} =: \|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}$$
задає норму в $W_0^{1,p}(\Omega)$, яка еквівалентна нормі $\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}$.

2. Нехай Ω - обмежена область в $\mathbb{R}^3$, $\partial\Omega \in C^1$. Чи кожна функція з $H^1(\Omega)$ належить до простору $L^5(\Omega)$?

3. Нехай Ω - обмежена область в $\mathbb{R}^7$, $\partial\Omega \in C^1$. Чи кожна функція з $W^{2,3}(\Omega)$ належить до простору $L^{21}(\Omega)$?

4. Нехай Ω - обмежена область в $\mathbb{R}^2$, $\partial\Omega \in C^1$. Чи кожна функція з $W^{1,1}(\Omega)$ належить до простору $L^2(\Omega)$, $L^3(\Omega)$?

5. Чи належить функція
$$u(x) = \ln\bigl(\ln(1+\frac{1}{|x|})\bigr), \quad x \in B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\} \quad (n > 1),$$
до таких просторів $W^{1,n}(B_1(0))$, $L^\infty(B_1(0))$?

6. Нехай Ω - обмежена область в $\mathbb{R}^2$, $\partial\Omega \in C^1$. Чи кожна функція з $H^1(\Omega)$ належить до простору $L^5(\Omega)$, $C(\overline{\Omega})$?

7. Нехай Ω - обмежена область в $\mathbb{R}^3$, $\partial\Omega \in C^1$. Чи кожна функція з $W^{1,5}(\Omega)$ належить до простору $C^{0,\frac{2}{5}}(\overline{\Omega})$?

8. Нехай Ω - обмежена область в $\mathbb{R}^2$, $\partial\Omega \in C^1$. Чи кожна функція з $W^{1,3}(\Omega)$ належить до простору $L^{21}(\Omega)$, $C(\overline{\Omega})$?

ТЕМА 7
ТЕОРЕМИ СОБОЛЄВА ТА РЕЛЛІХА-КОНДРАШОВА

Контрольні запитання

1. *Формулювання загальної теореми Соболєва.*
2. *Означення просторів Гельдера* $C^{k,\gamma}(\overline{\Omega})$.
3. *Означення компактного вкладення одного банахового простору в інший.*
4. *Формулювання теореми Релліха-Кондрашова.*

Задачі

В наступних задачах Ω є обмеженою областю в $\mathbb{R}^n$ і $\partial\Omega \in C^1$.

1. Чи правильне включення $H^2(\Omega) \subset L^{10}(\Omega)$, якщо $\Omega \subset \mathbb{R}^5$?
2. Чи правильне включення $W^{2,3}(\Omega) \subset L^{11}(\Omega)$, якщо $\Omega \subset \mathbb{R}^8$?
3. Яким просторам Гельдера належать такі простори $H^2(\Omega)$, $W^{2,3}(\Omega)$, $W^{2,4}(\Omega)$, якщо $\Omega \subset \mathbb{R}^2$?
4. Яким просторам Гельдера належать такі простори $H^2(\Omega)$, $W^{2,3}(\Omega)$, $W^{2,4}(\Omega)$, якщо $\Omega \subset \mathbb{R}^3$?
5. На підставі результатів задач 3 та 4 зробити висновок про вплив розмірності простору на гладкість функцій з просторів Соболєва.
6. Чи буде компактним включення $H^2(\Omega) \subset L^{\frac{19}{2}}(\Omega)$, якщо $\Omega \subset \mathbb{R}^5$?
7. Чи буде компактним включення $W^{2,3}(\Omega) \subset L^{10}(\Omega)$, якщо $\Omega \subset \mathbb{R}^8$?
8. Чи будуть компактними такі включення $H^2(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$, $W^{2,3}(\Omega) \subset C^1(\overline{\Omega})$, $W^{2,4}(\Omega) \subset L^{2005}(\Omega)$, якщо $\Omega \subset \mathbb{R}^2$?
9. Чи будуть компактними такі включення $H^2(\Omega) \subset L^{12}(\Omega)$, $W^{2,3}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$, $W^{2,4}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$, якщо $\Omega \subset \mathbb{R}^3$?

ТЕМА 8
НЕРІВНОСТІ В ПРОСТОРАХ СОБОЛЄВА

Контрольні запитання

1. *Основна нерівність Пуанкаре.*
2. *Нерівність Пуанкаре для кулі.*

Задачі

1. Нехай $u \in H^1(\Pi)$, $\Pi = (a,b) \times (c,d) \in \mathbb{R}^2$, $|\Pi| = (b-a)(d-c)$. Довести нерівність Пуанкаре для прямокутника

$$\int\limits_{\Pi} u^2 dx \le \frac{1}{|\Pi|}\Big(\int\limits_{\Pi} u\,dx\Big)^2 + \int\limits_{\Pi} \big((b-a)^2(\partial_{x_1} u)^2 + (d-c)^2(\partial_{x_2} u)^2\big)\,dx.$$

2. Нехай Ω та V - обмежені області такі, що $V \subset\subset \Omega$ і $\partial\Omega \in C^1$, $\partial V \in C^1$; функція $u \in H^1(\Omega)$ і $u(x) = 0$ майже скрізь в V. Довести, що існує така константа C, яка не залежить від u, що

$$\int_\Omega u^2\,dx \le C \int_\Omega |\nabla u|^2\,dx.$$

3. Довести одновимірну нерівність Харді

$$\int_0^b t^{-2} u^2(t)\,dt \le 4 \int_0^b |u'(t)|^2\,dt$$

для довільної функції $u \in H^1(0,b)$, $u(0) = 0$; тут $b \in (0, +\infty]$.

4. Довести, що для довільної функції $u \in H^1(0,b)$ та довільних чисел $\varepsilon \in (0,b]$ і $t \in [0,b]$ має місце така нерівність

$$u^2(t) \le 2\varepsilon^{-1}\|u\|^2_{L^2(0,b)} + 2\varepsilon\|u'\|^2_{L^2(0,b)}.$$

5. Довести, що білінійна форма

$$B(u,v) := \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\,dx + \int_{\partial\Omega} T(u)T(v)\,d\sigma_x, \quad u,\ v \in H^1(\Omega),$$

задає скалярний добуток в $H^1(\Omega)$ і норма породжена цим добутком еквівалентна нормі $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$. Тут T - оператор сліду.

ТЕМА 9
УЗАГАЛЬНЕНІ РОЗВ'ЯЗКИ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ

Контрольні запитання

1. *Означення узагальнених розв'язків еліптичних крайових задач з різними крайовими умовами.*

Задачі

В наступних задачах Ω є обмеженою областю в $\mathbb{R}^n$ і $\partial\Omega \in C^1$.

1. Довести, що існує єдина функція $u \in H_0^1(\Omega)$, яка задовольняє таку тотожність
$$\int_\Omega a(x)\nabla u(x) \cdot \nabla\varphi(x)\,dx = \int_\Omega f(x)\psi(x)\,dx, \quad \forall\, \varphi \in H_0^1(\Omega),$$
де $f \in L^2(\Omega)$; $a(x)$, $x \in \overline{\Omega}$, - неперервна додатна функція.

2. Нехай Γ - гладка поверхня, яка міститься в $\partial\Omega$, причому $\partial\Omega\backslash\overline{\Gamma} \neq \varnothing$. Дати означення узагальненого розв'язку мішаної крайової задачі
$$\Delta u = f \ \text{ в } \Omega, \quad u = 0 \ \text{ на } \partial\Omega \setminus \overline{\Gamma}, \quad \partial_\nu u = \psi \ \text{ на } \Gamma,$$
де $f \in L^2(\Omega)$, $\psi \in L^2(\Gamma)$ – задані функції, і довести існування та єдиність узагальненого розв'язку.

3. Функція $u \in H_0^2(\Omega)$ називається узагальненим розв'язком крайової задачі для бігармонічного рівняння
$$\Delta^2 u = f \ \text{ в } \Omega, \quad u = \partial_\nu u = 0 \ \text{ на } \partial\Omega,$$
якщо $\int_\Omega \Delta u\,\Delta\varphi\,dx = \int_\Omega f\varphi\,dx$ для всіх $\varphi \in H_0^2(\Omega)$. Тут f задана функція з $L^2(\Omega)$. Довести, що існує єдиний узагальнений розв'язок даної крайової задачі.

4. Нехай $f \in L^2(K)$, $K = (0,1) \times (0,1)$ і $\int_K f\,dx_1 dx_2 = 0$. Довести, що існує 1-періодична по x_1 і x_2 функція $u \in H^1(K)$, яка задовольняє інтегральну тотожність
$$\int_K \nabla u \cdot \nabla\varphi\,dx_1 dx_2 = \int_K f\,\varphi\,dx_1 dx_2$$
для всіх функцій $\varphi \in H^1(K)$, які є 1-періодичним по x_1 і x_2. Чи єдина така функція ?

ПРОГРАМА КУРСУ

"ПРОСТОРИ СОБОЛЄВА ТА УЗАГАЛЬНЕНІ РОЗВ'ЯЗКИ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ"

Лекцій – 32 години
Керівництво самостійною роботою – 6 годин
Програму розробив професор Мельник Т.А.

I. **Вступ.**

Роль просторів Соболєва в новому підході до постановки і розв'язку задач математичної фізики. Академік С. Л. Соболєв та його визначний вклад в математичну фізику XX століття.

II. **Означення просторів Соболєва та основні їх властивості.**

Простори Гельдера. Узагальнені похідні. Простори $W_p^k(\Omega)$ та їх елементарні властивості.

III. **Апроксимація та продовження.**

Локальна апроксимація гладкими функціями. Глобальна апроксимація гладкими функціями. Теорема про продовження з простору $W_p^1(\Omega)$ в $W_p^1(\mathbb{R}^n)$.

IV. **Поняття сліду для функцій з просторів Соболєва.**

Означення сліду функції з простору $W_p^1(\Omega)$. Оператор сліду та оцінка його норми в $L_p(\Gamma)$. Простір функцій з нульовими слідами. Формула інтегрування частинам для функцій з простору $W_p^1(\Omega)$.

V. **Теореми вкладення.**

Теорема Гагліардо-Ніренберга-Соболєва. Нерівність Моррі та наслідки з неї. Загальна теорема Соболєва. Теорема Релліха-Кондрашова про компактність вкладення просторів Соболєва. Теорема про компактність оператора сліду.

VI. **Додаткові питання теорії просторів Соболєва.**

Нерівність Пуанкаре. Нерівність Фрідрікса. Нерівності Харді. Ліпшіцеві функції та простір W_∞^1. Простір $H^{-1}(\Omega)$.

VII. **Узагальнені розв'язки еліптичних крайових задач.**

Поняття узагальненого розв'язку для еліптичного диференціального рівняння другого порядку з різними крайовими умовами. Теорема Лакса-Мільграмма. Енергетичні оцінки. Теореми існування та єдиності узагальненого розв'язку. Теореми Фредгольма. Регулярність узагальненого розв'язку.

ЛІТЕРАТУРА

1. С.Л. Соболев *Некоторые применения функционального анализа в математической физике.* - М.: Наука, 1988.

2. В.П. Михайлов *Дифференциальные уравнения в частных производных.* - М.: Наука, 1983.

3. О.А. Ладыженская *Краевые задачи математической физики.* - М.: Наука, 1973.

4. Д. Гильбарт, Н. Трудингер *Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка.* - М.: Наука, 1989.

5. L.C. Evans *Partial differential equations.* - Graduate Studies in Math., Vol. 19, American Mathematical Society, 1999.

Навчальне видання

ПРОСТОРИ СОБОЛЄВА ТА УЗАГАЛЬНЕНІ РОЗВ'ЯЗКИ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

Методичні вказівки до самостійної роботи із спеціального курсу

для студентів механіко–математичного факультету четвертого курсу

Друкується за авторською редакцією

Підписано до друку 26.09.05. Формат 60x84$^{1/16}$. Вид. № 343. Гарнітура Times. Папір офсетний. Друк офсетний. Наклад 100. Ум. друк. арк. 1,1. Зам. № 25-2882.

Надруковано у Видавничо–поліграфічному центрі "Київський університет"
01601, Київ, б–р Т. Шевченка, 14, кімн. 43,
☎ (38044) 239 3222; (38044) 239 3172; факс (38044) 234 3128.
e–mail: vydav_polygraph@.univ.kiev.ua
http:// vpc.univ.kiev.ua
Свідоцтво внесено до Державного реєстру ДК № 1103 від 31.10.02.