

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА
МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

СПЛАЙН-ФУНКЦІЇ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

РОБОЧА НАВЧАЛЬНА ПРОГРАМА ДИСЦИПЛІНИ

КИЇВ-2008

Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Механіко-математичний факультет
Кафедра математичної фізики

“ЗАТВЕРДЖУЮ”

Голова вченої ради механіко-математичного
факультету _____ проф. Городній М.Ф.

СПЛАЙН-ФУНКЦІЇ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

РОБОЧА НАВЧАЛЬНА ПРОГРАМА ДИСЦИПЛІНИ
освітньо-професійних програм підготовки бакалаврів математики ()
3 курс, 2 семестр

Затверджено
вченою радою
механіко-математичного факультету
протокол №__ від “__” _____ 2008р.

Викладач к.ф.-м.н., доцент Попов В.В.

Погоджено
з науково-методичною комісією
“__” _____ 2008р.
_____ проф. Курченко О.О.

Київ-2008

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ З ВИВЧЕННЯ ДИСЦИПЛІНИ

Дисципліна „Сплайн-функції та їх застосування” є дисципліною вільного вибору за блоком (ДВВБ) для спеціальності „математика” механіко-математичного факультету та викладається у VI семестрі в обсязі 2-х кредитів (за Європейською Кредитно-Трансферною Системою ECTS) в тому числі 34 години аудиторних занять, з них 34 години лекції, та 38 годин самостійної роботи. Викладання базується на матеріалах лекцій.

В результаті вивчення курсу студенти повинні:

- оволодіти теоретичними основами методів наближення сплайн-функціями;
- навчитись застосовувати сплайн-функції до розв'язування конкретних задач аналізу та математичної фізики

Метою і завданням навчальної дисципліни Апроксимація розв'язків крайових задач за допомогою сплайн-функцій дозволяє у ряді випадків одержувати набагато точніші результати, ніж ті, які одержують класичною апроксимацією (наприклад, кусково-сталою). Такий підхід до розв'язування крайових задач належить до сучасних чисельних методів і має поширене практичне застосування. Мета дисципліни – навчити студентів методам сплайн-функцій. Лекційний курс супроводжується індивідуальними практичними завданнями, які студенти виконують під час самостійної роботи над лекціями.

Предмет навчальної дисципліни „Сплайн-функції та їх застосування” включає основні відомості з сплайн-функції, застосування сплайнів при інтерполюванні, чисельного інтегрування та диференціювання функцій, застосування сплайнів при розв'язуванні крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь, інтегральних рівнянь, а також інші застосування сплайнів.

Вимоги до знань та вмінь.

Знати: теоретичні основи сплайн-функцій..

Вміти: використовувати сплайн-функції при розв'язуванні задач математичної фізики.

Система контролю знань. Навчальна дисципліна оцінюється за модульно-рейтинговою системою. Складається з 1-го модуля, до якого входять 8 тем.

Результати навчальної діяльності студентів оцінюється за 100-бальною шкалою.

Форми поточного контролю: оцінювання (рейтинг) виконаних домашніх самостійних завдань здійснюється у відповідності із його

складністю. Рейтинги визначені в таблиці розділу "Тематичний план дисципліни". Студент може отримати максимальний рейтинг в семестрі - 60 балів - за усні відповіді та доповнення підчас захисту домашніх самостійних завдань.

Модульний контроль: модульна контрольна робота.

ТЕМАТИЧНИЙ ПЛАН ДИСЦИПЛІНИ

№ теми	Назва теми (рейтинг завдань)	Кількість годин		
		Лекції	Практичні заняття	Самостійна робота
Модуль 1. Сплайн-функції та їх застосування				
1.	Основи сплайн-функцій.	4	0	2
2.	Інтерполяційні сплайн-функції (25).	10	0	12
3.	Екстремальні властивості кубічних сплайнів.	2	0	2
4.	Застосування сплайн-функцій для згладжування даних (10).	2	0	4
5.	Застосування сплайн-функцій в чисельному диференціюванні та інтегруванні (5).	2	0	2
6.	Застосування сплайн-функцій при розв'язуванні крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь(10).	4	0	6
7.	Застосування сплайн-функцій при розв'язуванні інтегральних рівнянь(10).	6	0	8
8.	Двовимірні інтерполяційні кубічні сплайни та їх застосування.	4	0	2
Всього годин за семестр 72, з них		34	0	38

ТЕМИ ЛЕКЦІЙ, ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ ТА ЗАВДАНЬ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 1. СПЛАЙН-ФУНКЦІЇ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

Тема №1. Основи сплайн-функцій.

Лекція 1. Простір сплайн-функцій – 2 год.

Введення в дисципліну. Визначення сплайн-функцій. Простір сплайн-функцій. Теорема про базис в просторі сплайнів-функцій.

Лекція 2. *B*-сплайни – 2 год.

Базисні сплайн-функції з скінченими носіями. *B*-сплайни. Нормалізовані базисні сплайн-функції.

Самостійна робота з вивчення матеріалу лекцій 1-2 - 2 год.

Література [1].

Тема №2. Інтерполяційні сплайн-функції.

Лекція 3. Інтерполяційні многочлени та їх властивості – 2 год.

Задача інтерполювання функцій. Системи Чебишова. Єдиність розв'язку задачі інтерполювання функцій многочленами. Многочлен Лагранжа та його похибка. Проблеми збіжності інтерполяційних многочленів. Приклади Рунге, Бернштейна.

Лекція 4. Інтерполяційні сплайн-функції першого степеня – 2 год.

Визначення інтерполяційних сплайн-функцій першого степеня. Оцінка похибки. Збіжність.

Лекція 5. Інтерполяційні кубічні сплайн-функції – 2 год.

Визначення інтерполяційних кубічних сплайн-функцій. Крайові умови кубічних сплайн-функцій та їх види.

Лекція 6. Побудова інтерполяційних кубічних сплайн-функцій – 2 год.

Алгоритми побудови інтерполяційних кубічних сплайн-функцій. Метод прогонки розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь з тридіагональною матрицею. Метод прогонки розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь з квазі-тридіагональною матрицею. Існування та єдиність інтерполяційних кубічних сплайн-функцій.

Лекція 7. Оцінки похибки та збіжність інтерполяційних кубічних сплайн-функцій – 2 год.

Оцінки похибки для інтерполяційних кубічних сплайн-функцій з крайовими умовами I та III виду. Збіжність інтерполяційних кубічних сплайн-функцій в просторі C .

Самостійна робота з вивчення матеріалу лекцій 3-7 - 12 год.

Завдання №1 (максимальний рейтинг - 5). Побудувати поліном Лагранжа в середовищі Pascal, C, MS Excel тощо. На відрізку $x \in [0, 1]$ здійснити чисельний експеримент для дослідження в просторі C похибки і збіжності поліному Лагранжа таких функцій:

$$u(x) = \sin(x);$$

$$u(x) = |x|;$$

$$u(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}.$$

Завдання №2 (максимальний рейтинг - 20). Побудувати інтерполяційну кубічну сплайн-функцію для крайових умов I-IV виду в середовищі Pascal, C, MS Excel тощо. Здійснити чисельний експеримент для дослідження в просторі C похибки і збіжності інтерполяційної кубічної сплайн-функції для функцій завдання №1. Дослідити також похибки першої та другої похідної інтерполяційної кубічної сплайн-функції.

Література [1, 2, 3, 4].

Тема №3. Екстремальні властивості кубічних сплайнів.

Лекція 8. Екстремальні властивості кубічних сплайнів – 2 год.

Задача про мінімізацію функціонала $J(u) = \int_a^b |u''(x)|^2 dx$. Теорема про існування та єдиність мінімуму функціонала $J(u)$ в класі функцій $W_2^2[a, b]$.

Самостійна робота з вивчення матеріалу лекції 8 - 2 год.

Література [1].

Тема №4. Застосування сплайн-функцій для згладжування даних.

Лекція 9. Застосування сплайн-функцій для згладжування даних – 2 год

Задача про мінімізацію функціонала $J(u) = \int_a^b |u''(x)|^2 dx + \sum_{i=0}^N \rho_i^{-1} (u_i - z_i^0)^2$.

Теорема про існування та єдиність мінімуму функціонала $J(u)$ в класі функцій $W_2^2[a, b]$.

Самостійна робота з вивчення матеріалу лекції 9 - 4 год.

Завдання №3 (максимальний рейтинг - 10). Використовуючи крайову умову I виду побудувати інтерполяційну кубічну згладжуючичу сплайн-функцію для $u = \exp(x)$, значення якої заокруглені з точністю до $\varepsilon = 0.005$ на сітці з кроком $h = 0.05$ на відрізку $x \in [0, 1]$. Здійснити чисельний експеримент для дослідження ефекту згладжування на основі порівнянь інтерполяційного і згладжуючого сплайну.

Література [1].

Тема №5. Застосування сплайн-функцій в чисельному диференціюванні та інтегруванні.

Лекція 10. Застосування сплайн-функцій в чисельному диференціюванні та інтегруванні – 2 год.

Чисельне диференціювання на рівномірній сітці. Чисельне інтегрування. Оцінки похибки формул чисельного інтегрування. Інтегрування з заданою точністю. Інтегрування сильно осцилюючих функцій.

Самостійна робота з вивчення матеріалу лекції 10 - 2 год.

Завдання №4 (максимальний рейтинг - 5). Використовуючи кубічний сплайн з крайовими умовами I виду (рівномірне розбиття, кількість ділянок $n = 20$), обчислити коефіцієнти ряду Фур'є для функції $\exp(x)$, $x \in [-\pi, \pi]$:

$$\exp(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

та порівняти отримані значення з точними, що визначаються формулами

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx e^x dx = \frac{(-1)^k (e^{\pi} - e^{-\pi})}{\pi(1+k^2)},$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx e^x dx = \frac{(-1)^{k+1} k(e^{\pi} - e^{-\pi})}{\pi(1+k^2)}$$

Література [1].

Тема №6. Застосування сплайн-функцій при розв'язуванні крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь.

Лекція 11. Застосування сплайн-функцій при розв'язуванні першої крайової задачі для звичайних диференціальних рівнянь – 2 год.

Постановка задачі. Формування розв'язувальної системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР). Методи розв'язування розріджених СЛАР

Лекція 12. Застосування сплайн-функцій при розв'язуванні другої і третьої крайової задачі для звичайних диференціальних рівнянь – 2 год.

Постановка задачі. Формування розв'язувальної системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР).

Самостійна робота з вивчення матеріалу лекції 11, 12 - 6 год.

Завдання №5 (максимальний рейтинг - 10). Поставити тестову лінійну крайову задачу з крайовими умовами загального вигляду. Використовуючи кубічний сплайн отримати наближений розв'язок та дослідити його похибку в залежності від кількості ділянок розбиття проміжку інтегрування диференціального рівняння.

Література [1].

Тема №7. Застосування сплайн-функцій при розв'язуванні інтегральних рівнянь.

Лекція 13. Застосування сплайн-функцій при розв'язуванні інтегральних рівнянь Фредгольма II роду.

Постановка задачі. Структура розв'язувальної СЛАР. Алгоритми заповнення матриці СЛАР.

Лекція 14. Застосування сплайн-функцій при розв'язуванні інтегральних рівнянь Вольтерра.

Постановка задачі. Структура розв'язувальної СЛАР. Алгоритми заповнення матриці СЛАР.

Лекція 15. Застосування сплайн-функцій при розв'язуванні інтегральних рівнянь Фредгольма I роду

Постановка задачі. Проблема некоректності інтегральних рівнянь Фредгольма I роду . Регуляризація інтегрального рівняння. Регуляризація СЛАР.

Самостійна робота з вивчення матеріалу лекції 13, 14, 15 - 8 год.

Завдання №6 (максимальний рейтинг - 5). Поставити тестову лінійну задачу розв'язування інтегрального рівняння Фредгольма II роду. Використовуючи кубічний сплайн отримати наближений розв'язок та дослідити його похибку в залежності від кількості ділянок розбиття проміжку інтегрування рівняння.

Завдання №7 (максимальний рейтинг - 5). Поставити тестову лінійну задачу розв'язування інтегрального рівняння Вольтерра II роду. Використовуючи кубічний сплайн отримати наближений розв'язок та дослідити його похибку в залежності від кількості ділянок розбиття проміжку інтегрування рівняння.

Література [1, 5].

Тема №8. Двовимірні інтерполяційні кубічні сплайни та їх застосування.

Лекція 16. Двовимірні інтерполяційні кубічні сплайни та їх застосування. в задачі стискання графічної інформації – 2 год.

Визначення кубічних сплайнів двох змінних. Типи крайових умов. Алгоритми побудови сплайнів. Існування та єдиність кубічних сплайнів двох змінних.

Лекція 17. Застосування. двовимірних інтерполяційних кубічних сплайнів – 2 год.

Задача наближення поверхонь. Задача стискання графічної інформації.

Самостійна робота з вивчення матеріалу лекції 16, 17 - 4 год.

Література [1, 3].

ЗВЕДЕНА ТАБЛИЦЯ ОЦІНЮВАННЯ ЗАВДАНЬ З САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ СТУДЕНТА

№	Зміст	Рейтинг
1	<p>Побудувати поліном Лагранжа в середовищі Pascal, C, MS Excel тощо. На відрізку $x \in [0, 1]$ здійснити чисельний експеримент для дослідження в просторі C похибки і збіжності поліному Лагранжа таких функцій:</p> $u(x) = \sin(x);$ $u(x) = x ;$ $u(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}.$	5

№	Зміст	Рейтинг
2	Побудувати інтерполяційну кубічну сплайн-функцію для крайових умов I-IV виду в середовищі Pascal, C, MS Excel тощо. Здійснити чисельний експеримент для дослідження в просторі C похибки і збіжності інтерполяційної кубічної сплайн-функції для функцій завдання №1. Дослідити також похибки першої та другої похідної інтерполяційної кубічної сплайн-функції.	20
3	Використовуючи крайову умову I виду побудувати інтерполяційну кубічну згладжуючичу сплайн-функцію для $u = \exp(x)$, значення якої заокруглені з точністю до $\varepsilon = 0.005$ на сітці з кроком $h = 0.05$ на відрізку $x \in [0, 1]$. Здійснити чисельний експеримент для дослідження ефекту згладжування на основі порівнянь інтерполяційного і згладжуючого сплайну.	10
4	<p>Використовуючи кубічний сплайн з крайовими умовами I виду (рівномірне розбиття, кількість ділянок $n = 20$), обчислити коефіцієнти ряду Фур'є для функції $\exp(x)$, $x \in [-\pi, \pi]$:</p> $\exp(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$ <p>та порівняти отримані значення з точними, що визначаються формулами</p> $a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx e^x dx = \frac{(-1)^k (e^{\pi} - e^{-\pi})}{\pi(1+k^2)},$ $b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx e^x dx = \frac{(-1)^{k+1} k (e^{\pi} - e^{-\pi})}{\pi(1+k^2)}$	5
5	Поставити тестову лінійну крайову задачу з крайовими умовами загального вигляду. Використовуючи кубічний сплайн отримати наближений розв'язок та дослідити його похибку в залежності від кількості ділянок розбиття проміжку інтегрування диференціального рівняння.	10
6	Поставити тестову лінійну задачу розв'язування інтегрального рівняння Фредгольма II роду. Використовуючи кубічний сплайн отримати наближений розв'язок та дослідити його похибку в залежності від кількості ділянок розбиття проміжку інтегрування рівняння.	5

№	Зміст	Рейтинг
7	Поставити тестову лінійну задачу розв'язування інтегрального рівняння Вольтерра II роду. Використовуючи кубічний сплайн отримати наближений розв'язок та дослідити його похибку в залежності від кількості ділянок розбиття проміжку інтегрування рівняння.	5
	Всього	60

РОЗПОДІЛ БАЛІВ ЗА VI СЕМЕСТР

	Змістовний модуль 1	Іспит	Разом
Бали	60	40	100

ОЦІНЮВАННЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ СТУДЕНТА

Бали	Оцінка
1-34	"незадовільно" з обов'язковим повторним вивченням дисципліни
35-59	"незадовільно" з можливістю повторного складання іспиту
60-64	"задовільно" ("достатньо")
65-74	"задовільно"
75-84	"добре"
85-89	"добре" ("дуже добро")
90-100	"відмінно"

Студент, який отримав менш 20 балів за змістовний модуль, не допускається до складання іспиту.

ПИТАННЯ ДО ЕКЗАМЕНУ

1. Визначення сплайн-функцій.
2. Простір сплайн-функцій.
3. Теорема про базис в просторі сплайнів-функцій.
4. Базисні сплайн-функцій з скінченими носіями.

5. *B*-сплайни.
6. Нормалізовані базисні сплайн-функції.
7. Задача інтерполювання функцій.
8. Системи Чебишова.
9. Єдиність розв'язку задачі інтерполювання функцій многочленами.
10. Многочлен Лагранжа та його похибка.
11. Проблеми збіжності інтерполяційних многочленів. Приклади Рунге, Бернштейна.
12. Визначення інтерполяційних сплайн-функцій першого степеня. Оцінка похибки. Збіжність.
13. Визначення інтерполяційних кубічних сплайн-функцій.
14. Крайові умови кубічних сплайн-функцій та їх види.
15. Алгоритми побудови інтерполяційних кубічних сплайн-функцій.
16. Метод прогонки розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь з тридіагональною матрицею.
17. Метод прогонки розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь з квазі-тридіагональною матрицею.
18. Існування та єдиність інтерполяційних кубічних сплайн-функцій.
19. Оцінки похибки для інтерполяційних кубічних сплайн-функцій з крайовими умовами I та III виду.
20. Збіжність інтерполяційних кубічних сплайн-функцій в просторі C .
21. Задача про мінімізацію функціонала $J(u) = \int_a^b |u''(x)|^2 dx$. Теорема про існування та єдиність мінімуму функціонала $J(u)$ в класі функцій $W^2_2[a, b]$.
22. Задача про мінімізацію функціонала

$$J(u) = \int_a^b |u''(x)|^2 dx + \sum_{i=0}^N \rho_i^{-1} (u_i - z_i^0)^2.$$
23. Теорема про існування та єдиність мінімуму функціонала $J(u) = \int_a^b |u''(x)|^2 dx + \sum_{i=0}^N \rho_i^{-1} (u_i - z_i^0)^2$ в класі функцій $W^2_2[a, b]$.
24. Застосування сплайн-функцій при чисельному диференціюванні.

25. Застосування сплайн-функцій при чисельному інтегруванні.
26. Застосування сплайн-функцій при розв'язуванні першої крайової задачі для звичайних диференціальних рівнянь
27. Застосування сплайн-функцій при розв'язуванні другої і третьої крайової задачі для звичайних диференціальних рівнянь
28. Застосування сплайн-функцій при розв'язуванні інтегральних рівнянь Фредгольма II роду.
29. Застосування сплайн-функцій при розв'язуванні інтегральних рівнянь Вольтерра.
30. Застосування сплайн-функцій при розв'язуванні інтегральних рівнянь Фредгольма I роду.
31. Визначення кубічних сплайнів двох змінних.
32. Типи крайових умов інтерполяційних кубічних сплайнів двох змінних.
33. Алгоритми побудови інтерполяційних кубічних сплайнів двох змінних.
34. Існування та єдиність кубічних сплайнів двох змінних.
35. Задача наближення поверхонь.
36. Задача стискання графічної інформації.

ДЖЕРЕЛА ІНФОРМАЦІЇ

а) основна література:

1. Зав'язлов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошніченко В.Л. Методи сплайн-функцій. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы. 1980. – 352с.
2. Корнейчук Н.П. Сплаины в теории приближения. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы. 1984. – 352с.

б) додаткова література:

3. Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж. Теория сплайнов и ее приложения – М.: Мир. 1972. – 312с.
4. Попов В.В. Сплайн-функции. Internet-сторінка мех.-мат. факультету сайту www.univ.kiev.ua.
5. Калиткин Н.Н. Численные методы. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы. 1978. – 512с.

Затверджено на засіданні кафедри математичної фізики,
протокол № 12 від 30.06.2008р.

Завідувач кафедри математичної фізики
доктор фізико-математичних наук, професор

Самойленко В.Г.