Київський національний університет
імені Тараса Шевченка

Методичний посібник
до практичних занять та самостійної роботи
з курсу “Рівняння математичної фізики”

Постановка основних крайових задач для рівнянь математичної фізики. Зведення рівнянь з частинними похідними до канонічного вигляду.

для студентів механіко-математичного факультету

Київ – 2004

Методичні вказівки до практичних занять та самостійної роботи з курсу "Рівняння математичної фізики" для студентів механіко-математичного факультету. Постановка основних крайових задач для рівнянь математичної фізики. Зведення рівнянь з частинними похідними до канонічного вигляду. / Упоряд. І.Б. Романенко, В.Г. Самойленко. – Київ, 2004. – 52 с.

Рецензенти:

Глущенко А.А., д-р фіз.-мат. наук, проф. кафедри математичної фізики Київського національного університету імені Тараса Шевченка

Нікітін А.Г., д-р фіз.-мат. наук, проф., завідувач відділу прикладних досліджень Інституту математики НАН України

Рекомендовано до друку вченою радою
механіко-математичного факультету
11 жовтня 2004 р., протокол № 2

Вступ

За діючим навчальним планом студенти механіко-математичного факультету вивчають курс "Рівняння математичної фізики" протягом одного навчального семестру. Дані методичні вказівки розроблено для підготовки та проведення практичних занять з рівнянь математичної фізики і розраховані на студентів та викладачів. Під час підготовки методичних вказівок використано багаторічний досвід викладання цього курсу на механіко-математичному факультеті Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

Методичні вказівки містять матеріал, який пов'язаний з першою темою "Постановка крайових задач для рівнянь з частинними похідними" та другою темою "Зведення рівнянь з частинними похідними до канонічного вигляду". Розглянуто приклади постановки основних крайових задач. Наведено класифікацію квазілінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними другого порядку, способи зведення рівнянь з частинними похідними до канонічного вигляду та приклади відшукання загальних розв'язків рівнянь з частинними похідними. Крім цього, запропоновано задачі для розв'язання під час аудиторних занять та самостійної роботи студентів.

Під час підготовки цих методичних вказівок упорядники використовували літературу, перелік якої подано у кінці методичної розробки. Складаючи завдання для самостійного розв'язання, упорядники використовували навчальні посібники [1 – 5].

При підготовці до практичних занять та самостійній роботі для більш глибокого вивчення теоретичного матеріалу доцільно також використовувати [6-13]. Додатковий матеріал з курсів алгебри, математичного аналізу та звичайних диференціальних рівнянь, потрібний для розв'язання задач, можна знайти у [14 – 18]

Тема 1. Постановка основних крайових задач для рівнянь математичної фізики

§1. Задача про малі поперечні коливання струни

Струна довжини *l* з однорідного матеріалу та зі сталим перерізом здійснює малі поперечні коливання під дією зовнішніх сил у середовищі, де наявні сили тертя та сили опору середовища (коливання називаються малими, коли величинами другого та більш високого порядку можна знехтувати у порівнянні з величинами нульового та першого порядку). Відомо положення струни $\varphi(x)$ та швидкості точок струни $\psi(x)$ у початковий момент *t* = 0. Сформулювати задачу про малі коливання струни для кожного з таких випадків:

a) Кінці струни рухаються за заданими законами $u_0(t)$ та $u_l(t)$;

b) На кінцях струни задані поперечні сили $p_0(t)$ та $p_l(t)$;

c) Кінці струни пружно закріплені, причому коефіцієнти жорсткості пружин дорівнюють k_0 та k_l, а інші точки закріплення пружин рухаються відповідно за законами $g_0(t)$ та $g_l(t)$.

Розв'язання. Повна постановка задачі складається з рівняння з частинними похідними, крайових умов та початкових умов. Рівняння з частинними похідними визначає закон перебігу процесу коливань для усіх точок струни, окрім крайових. Виведемо це рівняння.

Нехай струна у невідхиленому положенні співпадає з відрізком $[0,l]$ осі абсцис. За допомогою $u(x,t)$ позначимо відхилення точки x струни від нульового положення.

Розглянемо довільну частинку струни від x_1 до x_2, де $0 < x_1 < x_2 < l$ у деякий момент часу $t > 0$ (рис. 1). Згідно з другим законом Ньютона, рівнодійна сил, які діють на тіло, дорівнює добутку

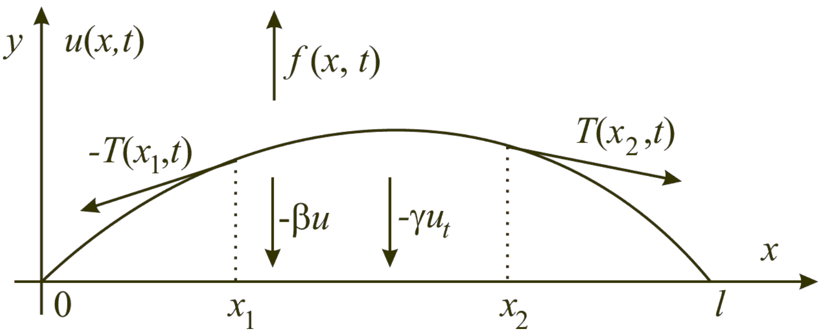

Рисунок 1

маси тіла на набуте ним прискорення, тобто $\vec{F} = m\vec{a}$.
Запис цієї рівності для частинки струни від x_1 до x_2 у проекціях на осі Ох та Оу відповідно дають співвідношення

$$-T(x_1,t)\cos\alpha(x_1,t) + T(x_2,t)\cos\alpha(x_2,t) = 0 \qquad (1)$$

та

$$-T(x_1,t)\sin\alpha(x_1,t) + T(x_2,t)\sin\alpha(x_2,t) + \int_{x_1}^{x_2} f(x,t)dx -$$

$$-\int_{x_1}^{x_2} \beta \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)dx - \int_{x_1}^{x_2} \gamma u(x,t)dx = \int_{x_1}^{x_2} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)dx\,. \qquad (2)$$

Тут $T(x,t)$ – модуль сили натягу струни у точці *x* у момент часу *t*; $\alpha(x,t)$ – кут, який утворює дотична до кривої $u(x,t)$ (при фіксованому *t*) з додатним напрямком осі *Ox*; $f(x,t)$ – щільність зовнішніх сил; β – коефіцієнт тертя; γ – коефіцієнт сил опору середовища; ρ – лінійна щільність матеріалу струни.

Неважко переконатись у тому, що для малих коливань

$$\cos\alpha(x,t) = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}} \approx 1, \qquad \sin\alpha(x,t) = \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}} \approx \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right).$$

Враховуючи отримані співвідношення для $\cos\alpha(x,t)$, $\sin\alpha(x,t)$, з рівності (1) знаходимо

$$T(x_1,t) = T(x_2,t) = T(t)\,, \qquad (3)$$

а з рівності (2), (3) дістаємо

$$T(t)\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x_2,t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x_1,t)\right) + \int_{x_1}^{x_2} f(x,t)dx -$$

$$-\int_{x_1}^{x_2} \beta \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)dx - \int_{x_1}^{x_2} \gamma u(x,t)dx = \int_{x_1}^{x_2} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)dx\,. \qquad (4)$$

З рівності (4) та формули Ньютона-Лейбніца отримуємо співвідношення

$$T(t)\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x,t)dx -$$

$$-\int_{x_1}^{x_2} \beta \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)dx - \int_{x_1}^{x_2} \gamma u(x,t)dx = \int_{x_1}^{x_2} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)dx ,$$

звідки, враховуючи довільність обраних точок x_1, x_2, маємо

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T(t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) - \beta \frac{\partial u}{\partial t} - \gamma u , \quad (5)$$

для $0 < x < l$, $t > 0$.

Доведемо, що в рівнянні (5) *T* – стала. Як відомо, зміна сили натягу струни відбувається при зміні її довжини. Знайдемо довжину струни у момент часу *t,* враховуючи той факт, що коливання малі. Якщо позначити за допомогою *L(t)* довжину струни у момент часу *t*, то можна записати

$$L(t) = \int_0^l \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} dx \approx \int_0^l dx = l .$$

Таким чином, за умови малих коливань довжина струни не змінюється. Іншими словами, сила натягу струни *T* залишається незмінною у часі*.* Враховуючи це, рівняння коливань струни може бути записано у вигляді

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) - \beta \frac{\partial u}{\partial t} - \gamma u , \quad (7)$$

або

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) - \beta \frac{\partial u}{\partial t} - \gamma u . \quad (8)$$

Тут $a^2 = \frac{T}{\rho}$, а під функцією $f(\ x,\ t\ )$ та коефіцієнтами $\beta,\ \gamma$ з рівняння (8) ми розуміємо відповідно вирази $\frac{f(x,t)}{\rho}$, $\frac{\beta}{\rho}$, $\frac{\gamma}{\rho}$, отримані з рівняння (7). Нові позначення для цих виразів не були введені з метою уникнення додаткових індексів.

Якщо у рівнянні (8) $f \equiv 0$, то говорять про вільні коливання струни; якщо $\beta \equiv 0$, то кажуть, що коливання відбуваються без тертя; коли ж $\gamma \equiv 0$, то говорять, що опір середовища відсутній.

Дістанемо тепер математичний запис крайових умов, які описують перебіг процесу коливань на крайніх точках струни.

У випадку а), коли задано закон руху кінців струни, запис крайових умов для лівого та правого кінця відповідно має вигляд

$$u(0,t) = u_0(t), \quad t > 0, \tag{9}$$

$$u(l,t) = u_l(t), \quad t > 0. \tag{10}$$

Для запису крайової умови, яка відповідає випадку b) на лівому кінці струни, розглянемо ділянку струни від *0* до x, де x – довільне значення від *0* до l. Запишемо проекцію рівності $\vec{F} = m\vec{a}$ на вісь Oy з урахуванням співвідношень, отриманих при виведенні рівняння (8) та того факту, що на ділянці струни $[0, x]$ сила натягу струни діє лише на правий кінець:

$$p_0(t) + T\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) + \int_0^x f(x,t)dx -$$

$$-\int_0^x \beta \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)dx - \int_0^x \gamma u(x,t)dx = \int_0^x \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)dx. \tag{11}$$

Виконавши в (11) граничний перехід при $x \to 0$, дістанемо

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = -\frac{p_0(t)}{T}, \quad t > 0, \tag{12}$$

що і відповідає крайовій умові на лівому кінці струни.

Крайова умова на правому кінці струни може бути отримана з аналогічних міркувань з урахуванням того факту, що для ділянки струни $[x, l]$, яка досліджується при виводі цієї умови, сила натягу спрямована у протилежний бік, аніж у випадку лівого кінця струни. Тому крайова умова для правого кінця матиме вигляд

$$\frac{\partial u}{\partial x}(l,t) = \frac{p_l(t)}{T}, \quad t > 0. \tag{13}$$

У випадку, коли в умові (12) або (13) $p_0 \equiv 0$ або $p_l \equiv 0$, то говорять, що на відповідний кінець струни сили не діють, або що кінець струни вільний.

У випадку с) пружного закріплення кінців струни крайові умови можуть бути отримані зі співвідношень (12), (13) і закону Гука

$$F = -k\,\Delta L,$$

де *F* – сила пружності, *k* – коефіцієнт жорсткості, а ΔL – абсолютне видовження пружини.

Співвідношення для випадку пружного закріплення струни відповідно для лівого та правого кінців мають вигляд

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{k_0(u(0,t) - g_0(t))}{T}, \quad t > 0, \tag{14}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(l,t) = -\frac{k_l(u(l,t) - g_l(t))}{T}, \quad t > 0. \tag{15}$$

Початкові умови, які характеризують стан струни у момент часу *t* = 0, мають вигляд

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in (0,l), \tag{16}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x), \quad x \in (0,l). \tag{17}$$

Умова (16) визначає профіль струни у початковий момент часу, а умова (17) характеризує швидкості точок струни у момент часу *t = 0*.

Таким чином, повна постановка задачі про малі коливання струни містить

1. *Рівняння з частинними похідними*
2. *Крайову умову на лівому кінці та крайову умову на правому кінці*
3. *Початкові умови*

Зауважимо, що тип крайових умов на лівому та правому кінцях струни може відрізнятись.

Наприклад, задача

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) - \gamma u, \quad x \in (0,l), \quad t > 0, \\ u(0,t) = 0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial x}(l,t) = -\dfrac{k_l\, u(l,t)}{T}, \quad t > 0, \\ u(x,0) = \sin\dfrac{\pi x}{l}, \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, \quad x \in (0,l) \end{cases}$$

описує процес вимушених (під дією зовнішньої сили) коливань гнучкої однорідної струни у пружному середовищі без тертя. Лівий кінець жорстко закріплено на висоті 0, а правий закріплено пружно, причому інша точка закріплення пружини жорстко зафіксована на висоті 0. У початковий момент струна мала профіль, заданий функцією $\sin\dfrac{\pi x}{l}$, та нульові швидкості.

§2. Постановка задач про коливання для двовимірних та тривимірних областей

Математичні моделі коливальних процесів можуть виникати і в тому випадку, коли досліджуваний просторовий об’єкт описується за допомогою множини у просторі R^2 або R^3.

Наприклад, можна розглянути задачу про дослідження поперечних коливань тонкої однорідної мембрани (тобто такого об’єкту, в якого товщина набагато менша за інші розміри), положення якої у невідхиленому стані співпадає з областю $\Omega \subset R^2$. Якщо позначити за допомогою *u(x,y,t)* поперечне відхилення точки з координатами *(x,y)* від "нульового" положення, то виявляється, що рівняння з частинними похідними, яке визначає процес коливань, має вигляд

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u + f(x,y,t) - \beta \frac{\partial u}{\partial t} - \gamma u, \quad (x,y) \in \Omega,\ t > 0\ ,$$

де $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ (оператор Лапласа), *f* (*x*, *y*, *t*) – функція, яка визначає щільність дії на мембрану зовнішніх сил, β – коефіцієнт тертя, γ – коефіцієнт опору середовища.

На межі мембрани може бути задано крайові умови одного з таких видів:

a) Задано закон руху точок краю мембрани

$$u(x,y,t) = U(x,y,t), \quad (x,y) \in \partial\Omega, \quad t > 0$$

b) На межі мембрани діє відома сила $p(x,y,t)$. Тоді крайова умова має вигляд

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x,y,t) = -\alpha\, p(x,y,t), \quad (x,y) \in \partial\Omega, \quad t > 0\ ,$$

де *n* – внутрішня нормаль до межі мембрани $\partial\Omega$, $\dfrac{\partial u}{\partial n} = (\nabla u, n)$.

У тому випадку, коли на межі мембрани задано умову $\dfrac{\partial u}{\partial n} = 0$, говорять, що на межу не діють ніякі сили, або, іншими словами, межа мембрани вільна.

c) Межа мембрани закріплена пружно з коефіцієнтом пружності *k(x,y)*, причому інші точки пружного закріплення рухаються за законом $g(x,y,t)$. Тоді крайова умова має вигляд

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x,y,t) = \alpha\, k(x,y)(u(x,y,t) - g(x,y,t)), \quad (x,y) \in \partial\Omega,\ t > 0\ .$$

Зауважимо, що межа $\partial\Omega$ мембрани може бути поділена на ділянки, на яких можуть бути задані крайові умови різного типу.

Початкові умови для задачі про малі коливання мембрани мають вигляд

$$u(x,y,0) = \varphi(x,y), \quad (x,y) \in \Omega\ ,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,y,0) = \psi(x,y), \quad (x,y) \in \Omega\ .$$

Перша з наведених початкових умов задає вигляд поверхні мембрани у початковий момент часу, а друга умова визначає швидкості точок мембрани у початковий момент.

Як і у випадку задачі про коливання струни, повна постановка задачі про малі коливання мембрани містить

1. *Рівняння з частинними похідними*
2. *Крайову умову (або умови) на межі мембрани*
3. *Початкові умови*

Крайових умов може бути кілька у випадку розбиття межі мембрани на ділянки, де крайові умови відрізняються.

Наприклад, задача

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u - \beta \dfrac{\partial u}{\partial t}, \quad (x,y) \in [0,1] \times [0,1],\ t > 0 \\ u(x,0,t) = 0,\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,1,t) = -k(u(x,1,t) - \sin t),\ x \in [0,1],\ t > 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,y,t) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(1,y,t) = 0,\ y \in [0,1],\ t > 0, \\ u(x,y,0) = x(1-x)y(1-y),\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,y,0) = 0,\ (x,y) \in [0,1]\times[0,1] \end{cases}$$

описує процес вільних (без дії зовнішніх сил) коливань тонкої квадратної мембрани зі стороною довжини 1 у середовищі з силами тертя, але без опору середовища. Край мембрани $y = 0$ жорстко закріплений на висоті 0, а протилежний край закріплений пружно, причому інші точки пружного закріплення рухаються за законом $\sin t$. Два інші краї мембрани вільні. У початковий момент поверхня мембрани мала вигляд *x* (1 – *x*) *y* (1 – *y*), а швидкості були нульовими.

У випадку області Ω з простору R^3 може розглядатись задача про коливання точок тривимірного тіла, які відбуваються паралельно до деякого заданого вектору. У цьому разі за допомогою *u* (*x*, *y*, *z*, *t*) можна позначити відхилення точки з координатами (*x*, *y*, *z*) від свого положення. При цьому виникає задача, яка може бути записана аналогічно двовимірному випадку (коливання мембрани), за тим винятком, що усі функції та вирази у сформульованій задачі будуть залежати вже від трьох просторових координат *x*, *y* та *z*.

§3. Задача про теплообмін усередині тонкого однорідного стрижня

Розглядається процес теплообміну у стрижні, зробленому з однорідного матеріалу, з теплоізольованою бічною поверхнею (окрім торців). Будемо вважати, що усі перпендикулярні перерізи стрижня однакові і що стрижень тонкий, тобто такий, що температура усіх точок кожного перпендикулярного перерізу однакова. Відомо, що температура стрижня у початковий момент часу задана за допомогою функції $\varphi(x)$, а усередині стрижня діють теплові джерела, щільність яких визначено

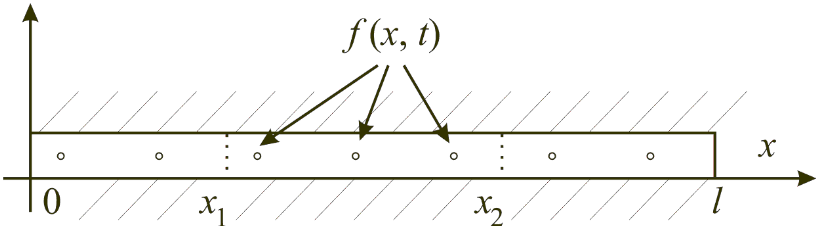

Рисунок 2

функцією $f(x,t)$. Потрібно сформулювати задачу, яка описує процес теплообміну усередині стрижня для кожного з таких випадків:

a) На кінцях стрижня підтримується температура, задана функціями $u_0(t)$ та $u_l(t)$;

b) На кінцях стрижня задано тепловий потік $q_0(t)$ та $q_l(t)$;

c) На кінцях стрижня відбувається конвективний теплообмін з навколишнім середовищем, яке має температуру $v_0(t)$ та $v_l(t)$ відповідно з коефіцієнтами конвективного теплообміну h_0 та h_l.

Розв'язання. Нехай повздовжний напрямок розташування стрижня співпадає з відрізком $[0,l]$ осі абсцис. Оскільки температура усіх точок кожного перпендикулярного перерізу стрижня однакова, то стрижень може бути ототожнений з цим відрізком. За допомогою $u(x,t)$ позначимо температуру точки *x* стрижня у момент часу *t*.

Виведемо рівняння з частинними похідними, яке описує процес теплообміну усередині стрижня. Розглянемо довільну ділянку стрижня від x_1 до x_2, де $0 < x_1 < x_2 < l$, на довільному часовому інтервалі від t_1 до t_2, де $0 < t_1 < t_2$ (рис. 2).

Згідно з першим законом термодинаміки

$$\Delta Q + \Delta A = \Delta U, \qquad (18)$$

де ΔQ – зміна кількості теплоти тіла, ΔA – робота над тілом зовнішніх сил, ΔU – зміна внутрішньої енергії тіла. У досліджуваному випадку $\Delta A = 0$, оскільки механічна робота над стрижнем не відбувається.

Як відомо, зміна кількості теплоти тіла може бути обчислена за формулою

$$\Delta Q = \int_V c\,\rho\,\Delta T\,dx, \qquad (19)$$

де *V* – повний об'єм тіла, с – коефіцієнт питомої теплоємності, ρ – щільність матеріалу, з якого складається тіло, ΔT – зміна температури тіла. Застосовуючи формулу (19) до досліджуваної ділянки стрижня, маємо, з урахуванням формули Ньютона-Лейбніца

$$\Delta Q=\int_{x_1}^{x_2} c\rho\sigma(u(x,t_1)-u(x,t_2))dx=\int_{x_1}^{x_2} dx\int_{t_1}^{t_2} c\rho\sigma\frac{\partial u}{\partial t}dt\,, \qquad (20)$$

де σ – площа перпендикулярного перерізу стрижня.

Зміна внутрішньої енергії тіла ΔU може бути визначена за формулою

$$\Delta U=\Delta U_{внутр}+\Delta U_{зовн}\,, \qquad (21)$$

де $\Delta U_{внутр}$ – зміна внутрішньої енергії за рахунок внутрішніх джерел тепла, $\Delta U_{зовн}$ – зміна внутрішньої енергії за рахунок надходження тепла із-зовні. Тоді

$$\Delta U_{внутр}=\int_{x_1}^{x_2} dx\int_{t_1}^{t_2}\sigma f(x,t)dt\,. \qquad (22)$$

Зміна внутрішньої енергії тіла за рахунок надходження тепла із зовнішнього середовища може бути обчислена за допомогою закону Фур'є

$$q=-k\frac{\partial u}{\partial n}\,, \qquad (23)$$

де *q* – тепловий потік за момент часу через переріз площі 1, *k* – коефіцієнт інтенсивності теплового потоку, який визначається властивостями матеріалу, $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ – похідна від функції температури у напрямку внутрішньої по відношенню до тіла нормалі до поверхні перерізу.

Оскільки у досліджуваному випадку тепловий потік у ділянку стрижня $[x_1,x_2]$ може надходити лише через перерізи, які відповідають точкам x_1, x_2, то з формули (23) та формули Ньютона-Лейбніца маємо

$$\Delta U_{зовн}=\int_{t_1}^{t_2}\left(-k\sigma\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{x=x_1}-k\sigma\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{x=x_2}\right)dt=$$

$$=\int_{t_1}^{t_2}k\sigma\left(-\frac{\partial u}{\partial x}(x_1,t)+\frac{\partial u}{\partial x}(x_2,t)\right)dt=\int_{t_1}^{t_2}dt\int_{x_1}^{x_2}k\sigma\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx\,. \qquad (24)$$

Нарешті, зі співвідношень (18), (20), (21), (22), (24) отримуємо

$$\int_{x_1}^{x_2} dx \int_{t_1}^{t_2} c\rho\sigma \frac{\partial u}{\partial t} dt = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{t_1}^{t_2} k\sigma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dt + \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{t_1}^{t_2} \sigma f(x,t) dt \,. \quad (25)$$

В силу довільного обрання інтервалів (x_1, x_2) та (t_1, t_2) з формули (25) отримуємо

$$c\rho\sigma \frac{\partial u}{\partial t} = k\sigma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sigma f(x,t) \,. \quad (26)$$

Після ділення співвідношення (26) на $c\rho\sigma$ знаходимо рівняння теплообміну усередині тонкого однорідного стрижня:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) \,, \quad (27)$$

де $a^2 = \dfrac{k}{c\rho}$, а під $f(x,t)$ ми розуміємо вираз $\dfrac{f(x,t)}{c\rho}$, отриманий з рівняння (26). Нове позначення для цієї функції не було введене з метою уникнення додаткових індексів.

Дістанемо тепер математичний запис крайових умов, які описують перебіг теплового процесу на краях стрижня.

У випадку а), коли відомо значення температур на кінцях стрижня, запис відповідних крайових умов для лівого та правого кінця має вигляд

$$u(0,t) = u_0(t), \quad t > 0 \,, \quad (28)$$

$$u(l,t) = u_l(t), \quad t > 0 \,. \quad (29)$$

У випадку b), коли відомий тепловий потік на торцях стрижня, з формули (23) маємо співвідношення

$$-k\sigma \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{x=0} = q_0(t) \,, \qquad -k\sigma \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{x=l} = q_l(t) \,,$$

або

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = -\frac{q_0(t)}{k\sigma}, \quad t > 0, \quad (30)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(l,t) = \frac{q_l(t)}{k\sigma}, \quad t > 0 \,. \quad (31)$$

Розглянемо випадок с), коли на кінцях стрижня відбувається конвективний теплообмін з навколишнім середовищем, температуру якого відомо. Тепловий потік усередину тіла, який виникає при конвективному теплообміні, може бути знайдено за законом Ньютона

$$q = -h(u - \nu) \,, \quad (32)$$

де q – тепловий потік через переріз одиничної площі; h – коефіцієнт теплообміну; u – температура тіла; ν – температура навколишнього середовища.

З (30) – (32) маємо запис крайових умов на кінцях стрижня у випадку конвективного теплообміну з навколишнім середовищем:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)=\frac{h_0(u(0,t)-\nu_0(t))}{k\sigma},\quad t>0, \tag{33}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(l,t)=-\frac{h_l(u(l,t)-\nu_l(t))}{k\sigma},\quad t>0\,. \tag{34}$$

Початкова умова, яка характеризує температуру стрижня у початковий момент часу t = 0, має вигляд

$$u(x,0)=\varphi(x),\quad x\in(0,l)\,. \tag{35}$$

Таким чином, повна постановка задачі про теплообмін у тонкому однорідному стрижні містить

1. *Рівняння з частинними похідними*
2. *Крайову умову на лівому кінці та крайову умову на правому кінці*
3. *Початкову умову*

Зауважимо, що тип крайових умов на лівому та правому кінцях стрижня може відрізнятись.

Наприклад, задача

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+1,\quad x\in(0,l),\quad t>0,\\ u(0,t)=1,\quad \dfrac{\partial u}{\partial x}(l,t)=-\dfrac{h_l(u(l,t)-2)}{T},\quad t>0,\\ u(x,0)=0,\quad x\in(0,l)\end{cases}$$

описує процес теплообміну усередині тонкого однорідного стрижня довжини l, усередині якого з рівномірною щільністю розподілені джерела тепла. Лівий кінець стрижня має сталу температуру 1, а на правому відбувається конвективний теплообмін з навколишнім середовищем, яке має температуру 2. У початковий момент стрижень мав нульову температуру.

§4. Постановка задач теплопровідності для двовимірних та тривимірних областей

Задачі про розповсюдження тепла виникають не лише у випадку одновимірного тіла (тонкий стрижень), але і в двовимірному випадку (тонка платівка) та тривимірному випадку (тіло у просторі).

Розглянемо плоску платівку, зроблену з однорідного матеріалу, форма якої відповідає деякій області $\Omega \subset R^2$. Будемо вважати, що платівка має сталу товщину та настільки тонка, що температура усіх її точок, отриманих у перетині з будь-яким вектором нормалі до її поверхні, є однаковою. Крім того, нехай згори та знизу платівка теплоізольована (тобто проникнення тепла у платівку із зовнішнього середовища можливе лише через її бічну межу). За допомогою *u*(*x*, *y*, *t*) позначимо температуру точки платівки з координатами (*x*, *y*) у момент часу *t*. Тоді рівняння з частинними похідними, яке описує процес теплообміну усередині платівки, має вигляд

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + f(x, y, t), \quad (x, y) \in \Omega, t > 0 \ ,$$

де $f\ (\ x,\ y,\ t\ )$ – функція, яка визначає щільність теплових джерел усередині платівки.

На межі платівки можуть бути задані крайові умови одного з таких типів:

a) Задано температуру точок межі платівки

$$u(x, y, t) = T(x, y, t), \quad (x, y) \in \partial\Omega, \quad t > 0$$

b) На межі платівки задано тепловий потік $q(x, y, t)$. Тоді крайові умови мають вигляд

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x, y, t) = -\frac{q(x, y, t)}{k}, \quad (x, y) \in \partial\Omega, \quad t > 0 \ ,$$

де *n* – внутрішня нормаль до межі платівки $\partial\Omega$, $\frac{\partial u}{\partial n} = (\nabla u, n)$, *k*(*x*, *y*) – коефіцієнт Фур'є.

У випадку, коли на межі платівки задано умову $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$, говорять, що тепловий потік на межі відсутній (край платівки теплоізольований).

c) На межі платівки відбувається конвективний теплообмін з навколишнім середовищем, температура якого на межі платівки становить $v(x, y, t)$. Тоді крайові умови мають вигляд

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x, y, t) = \frac{h(x, y)(u(x, y, t) - v(x, y, t))}{k(x, y)}, \quad (x, y) \in \partial\Omega, \ t > 0 \ ,$$

де *h* (*x*, *y*) – коефіцієнт Ньютона конвективного теплообміну.

Зауважимо, що межа $\partial\Omega$ платівки може бути поділена на ділянки, на яких можуть бути задані крайові умови різного типу.

Початкова умова для задачі про теплообмін усередині тонкої платівки має вигляд

$$u(x, y, 0) = \varphi(x, y), \quad (x, y) \in \Omega$$

і визначає температуру точок платівки у початковий момент часу.

Як і у випадку задачі про теплообмін усередині тонкого стрижня, повна постановка задачі про теплообмін у тонкій однорідній платівці містить

1. *Рівняння з частинними похідними*
2. *Крайову умову (або умови)*
3. *Початкову умову*

Крайових умов може бути кілька у випадку розбиття межі платівки на ділянки, де крайові умови відрізняються.

Наприклад, задача

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u, \ \ x^2 + y^2 < 1, t > 0, \\ u(x, y, t) = \sin t, \ x^2 + y^2 = 1, t > 0, \\ u(x, y, 0) = 0, \ x^2 + y^2 < 1 \end{cases}$$

описує процес теплообміну усередині тонкої однорідної теплоізольованої згори та знизу круглої платівки радіусу 1 без внутрішніх джерел тепла. На бічній межі платівки температура змінюється за законом sin *t*. У початковий момент температура платівки дорівнювала 0.

Для випадку простору R^3 може розглядатись задача про теплообмін усередині однорідного тіла такої ж форми, як деяка область Ω з простору R^3. Нехай *u* (*x* , *y*, *z*, t) – температура точки (*x* , *y*, *z*) тіла у момент часу *t*. Задача, яка виникає для невідомої функції *u*, аналогічна задачі у двовимірному випадку, за тим винятком, що усі вирази та функції, які виникають при її постановці, залежать, взагалі кажучи, від просторових координат *x* , *y* та *z*.

§ 5. Стаціонарні крайові задачі

Стаціонарним називається процес, який не залежить від часу. Стаціонарні задачі можуть виникати, наприклад, при вивченні процесів теплообміну. Нехай Ω – область у просторі R^n ($n = 1, 2, 3$), форма якої відповідає формі тіла, де вивчається процес теплообміну. За допомогою $u\ (x)$, де $x = (\ x_1,\ \ldots,\ x_n\ )$, будемо позначати функцію температури точок тіла. На відміну від задач, розглянутих у §§ 3, 4, $u\ (x)$ тепер не залежить від часу, тобто $\dfrac{\partial u}{\partial t} = 0$. Тоді з попередніх параграфів випливає, що рівняння з частинними похідними для невідомої функції *u* має вигляд

$$\Delta u = -f(x), \quad x \in \Omega$$

де $f\ (x)$ – функція, яка описує розподіл стаціонарних джерел тепла в області Ω.

Крайові умови, які формулюються для невідомої функції *u*(*x*), залишаються такими ж, як і в нестаціонарному випадку, а саме – мають один з таких виглядів:

a) Якщо відомо температуру точок на межі тіла

$$u(x) = T(x), \quad x \in \partial\Omega$$

b) Якщо на межі тіла задано стаціонарний тепловий потік $q(x)$, то

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x) = -\frac{q(x)}{k}, \quad x \in \partial\Omega,$$

де n – внутрішня нормаль до межі $\partial\Omega$, $\frac{\partial u}{\partial n} = (\nabla u, n)$, $k(\ x\ )$ – коефіцієнт Фур'є.

c) Якщо на межі відбувається конвективний теплообмін з навколишнім середовищем, температура якого на межі становить $v(x)$, то

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x) = \frac{h(x)(u(x) - v(x))}{k}, \quad x \in \partial\Omega,$$

де $h\ (\ x\ )$ – коефіцієнт Ньютона конвективного теплообміну.

Для стаціонарних задач не формулюються початкові умови, оскільки, фактично, вони будуть розв'язком задачі.

Таким чином, постановка стаціонарної крайової задачі містить

1. *Рівняння з частинними похідними*
2. *Крайову умову (або умови)*

Наприклад, задача

$$\begin{cases} \Delta u = -1, \quad (x, y, z) \in [0,1] \times [0,1] \times [0,1], \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0, y, z) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(1, y, z) = \dfrac{\partial u}{\partial y}(x, 0, z) = \dfrac{\partial u}{\partial y}(x, 1, z) = 0, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad x \in [0,1],\ y \in [0,1],\ z \in [0,1], \\ u(x, y, 0) = 100, \quad x \in [0,1],\ y \in [0,1], \\ \dfrac{\partial u}{\partial z}(x, y, 1) = -\dfrac{hu(x, y, 1)}{k}, \quad x \in [0,1],\ y \in [0,1] \end{cases}$$

описує стаціонарний процес теплообміну усередині однорідного кубу з довжиною ребра 1 та внутрішніми джерелами тепла, рівномірно розподіленими зі щільністю 1. Бічні грані кубу теплоізольовані, на нижній підтримується стала температура 100, а на верхній відбувається конвективний теплообмін з навколишнім середовищем нульової температури.

Задачі для практичних занять та самостійної роботи

Задачі до §§ 1, 2

1. Дайте фізичну інтерпретацію таких задач:

1) $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \; 0 < x < 1, \;\; t > 0, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, \; t > 0, \\ u(x,0) = 0, \;\; \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x), \; 0 < x < 1; \end{cases}$$

2) $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \; 0 < x < 1, \;\; t > 0, \\ u(0,t) = 0, \;\; u(1,t) = \sin t, \; t > 0, \\ u(x,0) = \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, \; 0 < x < 1; \end{cases}$$

3) $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \; 0 < x < 1, \;\; t > 0, \\ u(0,t) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(1,t) = 0, \; t > 0, \\ u(x,0) = \sin \dfrac{\pi x}{2}, \;\; \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, \; 0 < x < 1; \end{cases}$$

4) $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial u}{\partial t}, \; 0 < x < 1, \;\; t > 0, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, \; t > 0, \\ u(x,0) = \sin \pi x, \;\; \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, \; 0 < x < 1. \end{cases}$$

2. Записати крайову задачу про поперечні малі коливання струни щодо вертикального положення рівноваги, якщо її верхній кінець $x = 0$ жорстко закріплений, а нижній – вільний.

3. Знайти статичний прогин струни, що закріплена на кінцях, та зазнає дії неперервно розподіленого навантаження (на одиницю довжини).

4. Записати крайову задачу про поперечні коливання струни з закріпленими кінцями. Струна навантажена зосередженою масою m у точці x.

5. Вивести рівняння коливань струни з масами m_i, зосередженими у точках x_i, $i = 1,2,\ldots n$.

6. Невагома струна, що знаходиться у горизонтальній площині, з постійною кутовою швидкістю обертається навколо вертикальної осі, причому один із кінців струни прикріплений до деякої точки осі, а інший вільний. У початковий момент часу $t = 0$ точкам цієї струни надано малі відхилення та швидкості по нормалях до горизонтальної площини. Сформулювати крайову задачу про визначення відхилень струни від площини руху у рівновазі.

7. Нехай у точці $x = 0$ нескінченної однорідної струни знаходиться кулька маси m_0. Початкові швидкості та відхилення точок струни дорівнюють нулю. Записати крайову задачу про визначення відхилень точок струни від положень рівноваги у таких випадках:

1) починаючи із моменту часу $t = 0$ на кульку діє сила $F = F_0 \sin \omega t$;
2) у початковий момент кулька набуває імпульсу p_0 у поперечному напрямку;
3) розглянути випадок, коли кулька закріплена пружно з ефективною жорсткістю k^2 та у початковий момент набуває імпульсу p_0 у поперечному напрямку.

8. У точці $x = c$ струни закріплено кульку маси m_0. Записати крайову задачу про визначення малих відхилень точок струни при довільних початкових даних. Кінці струни закріплені.

9. Важка однорідна нитка довжини l, закріплена верхнім кінцем ($x = l$) на вертикальній осі, обертається навколо цієї осі зі сталою кутовою швидкістю ω. Довести, що рівняння малих коливань нитки навколо свого вертикального положення рівноваги має вигляд $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = g \dfrac{\partial}{\partial x}\left(x \dfrac{\partial u}{\partial x} \right) + \omega^2 u$.

10. Записати крайову задачу про поперечні коливання важкої однорідної струни відносно вертикального положення рівноваги, якщо її верхній кінець жорстко закріплений, а нижній вільний.

11. Повздовжні коливання стрижня[1]. Пружний прямолінійний стрижень виведено зі стану спокою тим, що його поперечним перерізам у момент часу $t=0$ надано малі повздовжні зсуви та швидкості. Записати задачу про визначення поперечних зсувів стрижня при $t>0$, припустивши, що поперечні перерізи стрижня увесь час залишаються плоскими. Розглянути випадки, коли кінці стрижня

1) закріплені жорстко;
2) рухаються у повздовжньому напрямку за заданими законами;
3) вільні;
4) закріплені пружно, тобто кожен із кінців у точці закріплення зазнає дії повздовжньої сили, що пропорційна до зсуву та спрямована протилежно зсуву.

12. Сформулювати крайову задачу про малі повздовжні коливання однорідного пружного стрижня, один кінець якого жорстко закріплений, а інший зазнає опору, пропорційного швидкості. Опором середовища знехтувати.

13. Точкам пружного однорідного прямокутного стрижня, що жорстко закріплений на лівому кінці та вільний на правому, у початковий момент часу $t=0$ надано малі поперечні відхилення та швидкості, що паралельні до повздовжньої вертикальної площини симетрії стрижня. Записати крайову задачу про визначення поперечних відхилень точок стрижня при $t>0$, припускаючи, що стрижень здійснює малі поперечні коливання.

14. Розглянути попередню задачу, припускаючи, що стрижень лежить на пружній основі, масою якої при вивченні поперечних коливань стрижня можна знехтувати. Коефіцієнт пружності основи, до якої прикріплено стрижень, дорівнює k, тобто поперечна для стрижня сила пружності, що діє з боку пружної основи на одиницю довжини стрижня у заданій його точці x, дорівнює $-ku(x,t)$.

15. Розглянути задачу 13, припускаючи, що стрижень лежить на пружній основі, масою якої при вивченні поперечних коливань стрижня можна знехтувати. Коефіцієнт пружності основи, до якої прикріплено стрижень, дорівнює k, тобто поперечна для стрижня сила пружності, яка діє з боку пружної основи на одиницю довжини стрижня у заданій точці x, дорівнює $-k\,u(x,t)$.

16. Починаючи з моменту часу $t=0$ один кінець прямокутного пружного однорідного стрижня здійснює повздовжні коливання за заданим законом, а до іншого прикладена сила $F(t)$, що спрямована вздовж осі стрижня. У момент часу $t=0$ поперечні перерізи були нерухомі та невідхилені. Сформулювати крайову задачу про визначення малих повздовжніх відхилень точок стрижня при $t>0$.

---

[1] Див. [1], глава 1, приклад 2.

17. Скласти рівняння повздовжніх коливань стрижня, площа поперечного перерізу якого є заданою функцією від x, вважаючи матеріал стрижня однорідним.

18. Важкий стрижень підвішений вертикально та защемлений так, що зсуви в усіх точках дорівнює нулю. У момент часу $t=0$ стрижень звільняється. Записати крайову задачу про вимушені коливання стрижня.

19. Розглянути задачу 18 для випадку, коли всі її умови залишаються без змін, за винятком умови на нижньому кінці: до нього прикріплена вага Q, причому за положення рівноваги приймається ненапружений стан стрижня (наприклад, у початковий момент з-під ваги прибирається підставка і стрижень починає видовжуватись).

20. Два напівобмежених однорідних пружних стрижні з однаковими поперечними перерізами жорстко з'єднані торцями у необмежений стрижень. Нехай ρ_1, E_1 – щільність та модуль пружності одного з них, а ρ_2, E_2 – іншого. Записати крайову задачу про визначення відхилень поперечних перерізів необмеженого стрижня від їх положень рівноваги, якщо у початковий момент часу поперечним перерізам надано деякі повздовжні зсуви та швидкості.

21. Сформулювати задачу про поперечні коливання нескінченного стрижня під дією сили $F(t)$, яка прикладена в точці $x = x_0$, що рухається вздовж стрижня зі швидкістю v. Сила прикладена з моменту часу $t = 0$.

22. Крутильні коливання пружного циліндра[2]. Пружний однорідний циліндр виведено зі стану спокою тим, що у момент часу $t=0$ його поперечні перерізи отримують малі повороти у поперечних до осі циліндра площинах. Записати крайову задачу про визначення кутів повороту поперечних перерізів циліндра при $t>0$; розглянути випадки вільних, жорстко закріплених та пружно закріплених кінців.

23. Кінець $x=0$ круглого однорідного валу закріплений, а до кінця $x=l$ жорстко прикріплено диск з моментом інерції J_0. У початковий момент диск закручується на кут α та відпускається без початкової швидкості. Сформулювати крайову задачу про визначення кутів повороту поперечних перерізів валу при $t>0$.

24. Записати крайову задачу про поперечні коливання мембрани, якщо у незбуреному стані мембрана плоска, а оточуюче середовище не чинить опору коливанням мембрани. Розглянути випадки, коли:

1) мембрана жорстко закріплена на границі L;
2) мембрана вільна на L;

[2] Див. [2], глава II, задача 3.

3) на частині границі L_1 мембрана закріплена жорстко, на решті границі $L_2 = L \setminus L_1$ вона вільна.

25. Сформулювати крайову задачу про коливання круглої однорідної мембрани, що закріплена по краю, у середовищі, опір якого пропорційний до першого степеня швидкості. У момент $t = 0$ до поверхні мембрани прикладена зовнішня сила щільності $f(r, \phi, t)$, що діє перпендикулярно до площини незбуреної мембрани. Початкові швидкості та відхилення точок мембрани відсутні.

26. Закріплена по краю однорідна прямокутна мембрана у початковий момент часу $t = 0$ отримує удар в околі центральної точки, так що

$$\lim_{\varepsilon \to \infty} \int_{U_\varepsilon} v_0(x)\, dx = A,\ x = (x_1, x_2)$$

де A – деяка стала, $v_0(x)$ – початкова швидкість. Записати крайову задачу про вільні коливання мембрани.

27. На плоску мембрану, що обмежена контуром L, діє стаціонарне поперечне навантаження зі щільністю $f(x, y)$. Сформулювати крайову задачу про відхилення точок мембрани від площини, якщо:

1) мембрана закріплена по краю;
2) край мембрани вільний;
3) край мембрани закріплений пружно.

28. Записати крайову задачу про малі радіальні коливання ідеального однорідного газу, що міститься у циліндричній трубці радіуса R. Довжина трубки настільки велика, що її можна вважати нескінченною в обидва боки. Початкові швидкості та початкові відхилення є заданими функціями від r.

29. Сформулювати крайову задачу про малі радіальні коливання ідеального газу, що міститься у сферичній посудині радіуса R, якщо початкові швидкості та початкові відхилення задано як функції від *x*, *y*, *z*.

30. Електричні коливання у дроті[3]. Записати крайову задачу про визначення сили та напруження змінного струму, що йде по тонкому дроту з неперервно розподіленим по довжині опором R, ємністю C, самоіндукцією L та втратою G, якщо один із кінців дроту заземлено, а до іншого прикладено ЕРС (електрорушійну силу) $E(t)$ і якщо задано початковий струм $i(x,0) = f(x)$ та початкова напруга $v(x,t) = F(x)$.

31. Сформулювати крайову задачу про електричні коливання у дроті; опір та втрати вважати настільки малими, що ними можна

---

[3] Див. [2], глава II, задача 19.

знехтувати. Кінці дроту заземлені: один – через зосереджений опір R_0, а інший – через зосереджену ємність C_0.

32. Розглянути попередню задачу, припускаючи, що один кінець дроту заземлено через зосереджену самоіндукцію $L_0^{(1)}$, а до другого через зосереджену самоіндукцію $L_0^{(2)}$ прикладено ЕРС $E(t)$.

33. Записати крайову задачу про електричні коливання у дроті, якщо кінці дроту заземлено через зосереджені опори.

34. Розглянемо електромагнітне поле у деякому середовищі. Виходячи з рівнянь Максвела[4], отримати рівняння для компонентів векторів напруженості електричного та магнітного полів у випадках:

1) щільність зарядів $\rho = 0$, $\varepsilon = \text{const}$, $\lambda = \text{const}$, $\mu = \text{const}$, $J = \lambda E$ (закон Ома);
2) середовище – вакуум і струми відсутні.

35. Записати задачу про проникнення магнітного поля у правий на півпростір, що заповнений середовищем із провідністю σ, якщо починаючи з моменту часу $t = 0$ на поверхні $x = 0$ підтримується напруженість магнітного поля $H = H_0 \sin \omega t$, що спрямована паралельно до поверхні.

Задачі до §§ 3, 4

36. Дайте фізичну інтерпретацію задач та прогноз розвитку процесу при $t \to \infty$:

1) $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \; t > 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(1,t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x,0) = \sin \pi x, \quad 0 < x < 1; \end{cases}$$

[4] Див. [3], розділ 1, параграф 2, приклад 10.

2) $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ \ 0 < x < 1, \ t > 0, \\ u(0,t) = 1, \quad u(1,t) = 2, \ \ t > 0, \\ u(x,0) = 0, \ \ 0 < x < 1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ \ 0 < x < 1, \ t > 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial x}(1,t) = 1, \ \ t > 0, \\ u(x,0) = 0, \ \ 0 < x < 1. \end{cases}$

37. Дано тонкий однорідний стрижень довжини l із початковою температурою $f(x)$. Записати крайову задачу про визначення температури стрижня, якщо на кінці $x = 0$ підтримується стала температура u_0, а на бічній поверхні та на кінці $x = l$ відбувається конвективний теплообмін із оточуючим середовищем нульової температури за законом Ньютона.

38. Сформулювати задачу про визначення температури у нескінченному тонкому теплоізольованому стрижні, по якому з моменту $t = 0$ у додатному напрямку зі швидкістю v_0 починає рухатись точкове теплове джерело, що випромінює q одиниць тепла в одиницю часу.

39. Записати крайову задачу про охолодження тонкого однорідного кільця радіусу R, на поверхні якого відбувається конвективний теплообмін із оточуючим середовищем заданої температури. Нерівномірністю розподілу температури по товщині кільця знехтувати.

40. Усередині однорідної кулі, починаючи з моменту часу $t = 0$, діють джерела тепла з рівномірно розподіленою постійною щільністю Q. Сформулювати крайову задачу про розподіл температури при $t > 0$ усередині кулі, якщо початкова температура довільної точки кулі залежить лише від відстані від цієї точки до центра кулі. Розглянути випадки, коли:

1) на поверхні кулі підтримується нульова температура;
2) на поверхні кулі відбувається теплообмін (за законом Ньютона) з оточуючим середовищем нульової температури.

41. Дано однорідну кулю радіусу R з нульовою початковою температурою. Записати крайову задачу про розподіл температури при $t > 0$ усередині кулі, якщо:

1) куля нагрівається рівномірно по всій поверхні сталим тепловим потоком q;
2) на поверхні кулі відбувається конвективний теплообмін з оточуючим середовищем, температура якого залежить тільки від часу.

42. Початкова температура необмеженої платівки товщини $2h$ дорівнює нулю. Сформулювати крайову задачу про розподіл температури при $t > 0$ по товщині платівки, якщо:

1) платівка нагрівається з обох боків однаковими сталими тепловими потоками q;
2) у платівці починаючи з моменту часу $t = 0$ діє джерело тепла з постійною щільністю Q, а її основи підтримуються при нульовій температурі.

43. Необмежений циліндр радіусу R має початкову температуру $f(r)$. Записати крайову задачу про радіальне розповсюдження тепла, якщо:

1) бічна поверхня підтримується при постійній температурі;
2) на бічній поверхні відбувається колективний теплообмін з оточуючим середовищем нульової температури.

44. Початковий розподіл температур в однорідній кулі заданий функцією $f(r,\theta,\varphi)$. Сформулювати крайову задачу про розподіл тепла у кулі, якщо поверхня кулі підтримується за сталої температури u_0.

45. Два напівобмежені стрижні, виготовлені із різних матеріалів, у початковий момент з'єднані своїми кінцями. Записати крайову задачу про розподіл температур в утвореному нескінченному стрижні, якщо відомі початкові температури кожного з двох напівобмежених стрижнів.

46. Вивести рівняння дифузії[5] у нерухомому середовищі, припускаючи, що поверхнями однакової щільності у кожен момент часу t є площини, що перпендикулярні до осі x. Записати крайові умови, припускаючи, що дифузія відбувається у плоскому шарі $0 \le x \le l$. Розглянути випадки:

1) на граничних площинах концентрація речовини, яка дифундує, підтримується рівною нулю;
2) граничні площини непроникні;

[5] Див. [1], глава 1, приклад 6.

3) граничні площини напівпроникні, причому дифузія крізь ці площини відбувається за законом, що подібний до закону Ньютона про конвективний теплообмін.

47. Вивести рівняння дифузії нестійкого газу (кількість молекул, що розпалися за одиницю часу у даній точці, пропорційна до щільності).

48. Розчинена речовина зі сталою початковою щільністю c_0 дифундує з розчину, що міститься між площинами $x = 0$ та $x = h$, у розчинник, що обмежений площинами $x = h$, $x = l$. Сформулювати крайову задачу для процесу вирівнювання щільності, припускаючи, що границі $x = 0$, $x = l$ непроникні для речовини.

Задачі до § 5

49. Запишіть та розв'яжіть крайову задачу про знаходження стаціонарного розподілу тепла у тонкому однорідному стрижні довжини 1, на лівому кінці якого підтримується стала температура 1, а правий теплоізольований.

50. Запишіть та розв'яжіть крайову задачу про знаходження стаціонарний теплообмін у тонкому однорідному стрижні довжини 1, лівий кінець якого теплоізольований, на правому підтримується стала температура 0, а усередині стрижня діють стаціонарні теплові джерела зі щільністю $\cos \pi x$.

51. Записати задачу про обтікання кулі стаціонарним потоком ідеальної рідини (потенціальна течія). Навести електростатичну аналогію.

52. Рівняння стаціонарної дифузії[6]. Вивести рівняння стаціонарного процесу дифузії:

1) у нерухомому однорідному ізотропному середовищі;
2) в ізотропному середовищі, що рухається із заданою швидкістю, наприклад, вздовж осі x.

53. Рівняння електростатики. Показати, виходячи з рівнянь Максвела [7], що потенціал електростатичного поля задовольняє рівняння Пуассона з правою частиною, що пропорційна до об'ємної щільності зарядів. Дати фізичну інтерпретацію крайовим умовам першого та другого роду.

54. Рівняння магнітостатики. Показати, що потенціал стаціонарного магнітного поля за відсутності електричних струмів задовольняє рівняння Лапласа.

55. Поле постійного електричного струму. Переконатись у тому, що потенціал електричного поля постійного електричного струму задовольняє рівняння Лапласа. Сформулювати крайові умови

1) на заземленій ідеально провідній поверхні;
2) на границі з діелектриком.

---

[6] Див. [3], розділ 1, параграф 2, приклад 8.
[7] Рівняння Максвела див. у [3], розділ 1, параграф 2, приклад 10.

56. Потенціальний рух нестисливої рідини. Показати, що потенціал швидкостей стаціонарного потоку нестисливої рідини задовольняє рівняння Лапласа. Записати крайову умову на поверхні твердого тіла, що знаходиться у стані спокою або рухається за деякою заданою швидкістю.

57. Основні задачі електростатики. Електростатичне поле, створене зарядженим провідником скінчених розмірів, можна визначити:

1) задаючи значення потенціалу провідника;
2) задаючи значення заряду провідника.

Ці задачі називаються першою та другою основними задачами електростатики. Дати математичне формулювання першої та другої задач електростатики.

58. Подібність різних стаціонарних полів[8]. Встановити подібність між полем сталого електричного струму, з одного боку, та термічним, електростатичним, магнітостатичним полями, полем концентрацій стаціонарного процесу дифузії та полем швидкостей потенціальної течії нестисливої рідини, з іншого боку. Порівняти умови спряження на границі розриву фізичних констант.

59. Сформулювати задачу про крутильні коливання циліндра, подібну до задачі 30 про електричні коливання у дроті, взявши за функцію, що характеризує електричні коливання, спочатку напруження, а потім силу струму. Встановити необхідні та достатні умови того, щоб перша задача була подібна до другої.

[8] Див. [2], глава II параграф 5.

Тема 2. Зведення рівнянь з частинними похідними до канонічного вигляду

§ 1. Класифікація квазілінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними другого порядку

Класифікація диференціальних рівнянь з частинними похідними проводиться для випадку квазілінійних диференціальних рівнянь другого порядку, які записуються у вигляді

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + F(x,u,\nabla u) = 0, \qquad (1)$$

де $x \in R^n$, $a_{ij}(x) = a_{ji}(x),\ i,j=\overline{1,n}$. Невідома функція та коефіцієнти у рівнянні (1) є дійсними. Нехай, крім того, коефіцієнти рівняння (1) – неперервні функції.

При класифікації рівнянь вигляду (1) або, як ще кажуть, визначенні типу диференціального рівняння (1), розрізняють рівняння гіперболічного, ультра гіперболічного, еліптичного та параболічного типів.

Класифікація рівнянь вигляду (1) може проводитись як в окремо взятій точці, так і в деякій (обраній) області.

Метод проведення класифікації рівняння вигляду (1) базується на таких міркуваннях.

Нехай $A = \left\| a_{ij}(x) \right\|_{i,j=1}^{n}$ – матриця коефіцієнтів рівняння (1). Як випливає з обмежень, накладених на коефіцієнти рівняння, для кожного $x \in R^n$ матриця *A* – дійсна симетрична матриця. Як відомо (див. [11]), така матриця має n дійсних власних чисел $\lambda_k = \lambda_k(x),\ k=\overline{1,n}$. Позначимо за допомогою $n_+ = n_+(x)$ кількість додатних власних чисел цієї матриці, за допомогою $n_- = n_-(x)$ – кількість від'ємних власних значень (при фіксованому значенні *x*).

Рівняння вигляду (1) у деякій фіксованій точці $x \in R^n$ класифікуються так:

Рівняння відноситься до еліптичного типу, якщо $n_+ = n$ або $n_- = n$.

Рівняння відноситься до гіперболічного типу, якщо $n_+ = n-1$, а $n_- = 1$ або $n_+ = 1$, а $n_- = -1$.

Рівняння відноситься до ультрагіперболічного типу, якщо $1 < n_+ < n-1$, $1 < n_- < n-1$ і $n_+ + n_- = n$.

Рівняння відноситься до параболічного типу, якщо $n_+ + n_- < n$.

Якщо у рівнянні (1) a_{ij} – сталі, то рівняння зберігає свій тип в усьому просторі R^n, бо власні значення λ_k, $k = \overline{1,n}$ не залежать від *x*.

Приклад 1.

Визначити тип рівняння

$$u_{xx} - 4u_{xy} + 2_{yy} + 11u_x - 3 = 0\,.$$

Розв'язання. Запишемо матрицю старших коефіцієнтів рівняння, враховуючи те, що вона має бути симетричною.

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 2 \end{Vmatrix}$$

Знайдемо власні числа цієї матриці

$$\det\begin{Vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2 & 2-\lambda \end{Vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda - 2 = 0\,, \qquad \lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}\,.$$

Оскільки власні значення мають протилежний знак, то рівняння відноситься до гіперболічного типу.

У випадку двох незалежних змінних (*n* = 2) тип рівняння вигляду (1) можна встановити не лише в окремо взятій точці, а й у деякій області. З цією метою тип рівняння

$$a(x,y)u_{xx} + 2b(x,y)u_{xy} + c(x,y)u_{yy} + f(x,y,u,\nabla u) = 0\,. \qquad (2)$$

Запишемо матрицю старших коефіцієнтів рівняння (2) та знайдемо її власні значення (будемо скорочено писати замість *a*(*x, y*), *b*(*x, y*), *c*(*x, y*) відповідно *a*, *b*, *c*).

$$A = \begin{Vmatrix} a & b \\ b & c \end{Vmatrix},$$

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - (a+c)\lambda + ac - b^2 = 0\,. \qquad (3)$$

Хоча існування дійсних коренів отриманого квадратного рівняння випливає з загальної теорії симетричних матриць, однак неважко переконатись, що дискримінант отриманого квадратного рівняння може бути знайдений за формулою $D = (a-c)^2 + 4b^2$, тобто є невід'ємним.

У даному випадку для визначення типу рівняння (2) розв'язання відповідного характеристичного рівняння не є обов'язковим. Досить проаналізувати вільний член рівняння (3) $\delta = ac - b^2$, який, як відомо, є добутком коренів λ_1 та λ_2.

Якщо у точці (x,y) маємо $\delta > 0$, то корені одного знаку і рівняння (2) відноситься до еліптичного типу. Якщо у точці (x,y) $\delta = 0$, то рівняння параболічного типу. І, нарешті, якщо $\delta < 0$, то у точці (x,y) рівняння буде гіперболічним.

Якщо зазначені вище умови для виразу

$$\delta = \delta(x, y) = a(x, y)c(c, y) - b^2(x, y)$$

виконані у деякій області $\Omega \subset R^2$, то рівняння (2) буде, відповідно, рівнянням еліптичного, параболічного чи гіперболічного типу в області Ω. У цих випадках кажуть, що рівняння (2) зберігає свій тип в області Ω.

§ 2. Зведення до канонічного вигляду квазілінійних диференціальних рівнянь другого порядку зі сталими коефіцієнтами при старших похідних

Розглянемо рівняння з частинними похідними вигляду

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + F(x, u, \nabla u) = 0\,, \tag{4}$$

де $x \in R^n$, $a_{ij} = a_{ji}$, $i, j = \overline{1, n}$.

Рівняння вигляду (4) є частинним випадком рівняння вигляду (1), коли коефіцієнти при старших похідних сталі. Як і раніше, за допомогою $A = \left\| a_{ij} \right\|_{i,j=1}^{n}$ позначимо матрицю коефіцієнтів рівняння (4).

Канонічним виглядом рівняння (4) назвемо таку форму його запису, коли $a_{ij} = 0,\ i \neq j,\quad i, j = \overline{1, n}$, а для випадку *i* = *j* коефіцієнт a_{ij} може бути рівний лише 0, 1 або –1.

Відомо (див. [12]), що при заміні координат $y = Sx$ рівняння (4) зводиться до рівняння

$$\sum_{i,j=1}^{n} \widetilde{a}_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_i \partial \xi_j} + F(\xi, u, \nabla u) = 0\,, \tag{5}$$

матриця якого $\widetilde{A} = \left\| \widetilde{a}_{ij} \right\|_{i,j=1}^{n}$ пов’язана з матрицею *A* за допомогою співвідношення

$$\widetilde{A} = SAS^T \tag{6}$$

Тут S – невироджена матриця, яка називається матрицею переходу від координат $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ до координат $(y_1, y_2, \ldots y_n)$.

З іншого боку, з матрицею A (тобто, з рівнянням (4)) можна пов’язати симетричну квадратичну форму

$$\alpha^T A \alpha\ ,\ \alpha \in R^n\,, \tag{7}$$

а з рівнянням (5) – квадратичну форму

$$\beta^T \widetilde{A}\, \beta\ ,\ \ \beta \in R^n\ \text{[9]}. \tag{8}$$

Припустимо, що вдалося знайти заміну $\alpha = B\beta$, за допомогою якої квадратична форма (7) може бути зведена до квадратичної форми (8). Виконуючи заміну $\alpha = B\beta$ у квадратичній формі (7) та враховуючи (8), можна встановити, що

$$\beta^T \widetilde{A}\, \beta = (B\beta)^T A\, (B\beta) = \beta^T B^T A B\beta\ ,$$

звідки, разом зі співвідношенням (6), маємо

$$\widetilde{A} = S\,A S^T = B^T A\ B\ , \tag{9}$$

тобто $S = B^T$.

У тому випадку, коли рівняння (5) – рівняння у канонічному вигляді, то й квадратична форма (8) теж буде квадратичною формою у канонічному вигляді (означення канонічного вигляду квадратичної форми можна знайти, наприклад, у [13]).

Враховуючи те, що матриця квадратичної форми (8) така ж, як матриця коефіцієнтів при старших похідних для рівняння (5), вигляд диференціальної форми для старших похідних рівняння (5) можна записати одразу за аналогією з виглядом квадратичної форми (8), тобто без додаткових дій по обчисленню відповідних похідних при виконанні заміни.

Отже, маємо такий **алгоритм зведення квазілінійного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами при старших похідних до канонічного вигляду**:

1. За рівнянням (4) записати квадратичну форму (7).
2. За допомогою заміни $\beta = C\alpha$ виконати зведення квадратичної форми (7) до квадратичної форми (8) таким чином, щоб форма (8) була у канонічному вигляді. Способи зведення квадратичної форми до канонічного вигляду можна знайти, наприклад, у [13].
3. Матриця B заміни $\alpha = B\beta$ знаходиться як $B = C^{-1}$, а матриця *S* заміни $y = Sx$ знаходиться як $S = B^T$.

---

[9] Зауважимо, що запис квадратичної форми вигляду (7), яка відповідає рівнянню вигляду (4), можна здійснити за допомогою виконання формальної заміни

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \to \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\alpha_i\alpha_j\ .$$

Аналогічна процедура може бути виконана і для запису квадратичної форми (9), яка відповідає рівнянню (5).

4. Обчислити значення виразів, залежних від x у рівнянні (4), у термінах виразів, залежних від ξ у рівнянні (5), якщо це потрібно. Обчислити значення перших похідних по x у рівнянні (4), у термінах перших похідних по ξ у рівнянні (5), якщо це потрібно. Записати вигляд диференціальної форми для старших похідних рівняння (5) за виглядом квадратичної форми (8).

5. Записати рівняння (5) у канонічному вигляді.

Приклад 1.

Звести до канонічного вигляду рівняння

$$u_{xx} + 2u_{xy} + 5u_{yy} = 0 \qquad (10)$$

Розв'язання. Квадратична форма, яка відповідає рівнянню (10), має вигляд:

$$\alpha_1^2 + 2\alpha_1\alpha_2 + 5\alpha_2^2 .$$

Виконаємо зведення цієї форми до канонічного вигляду

$$\alpha_1^2 + 2\alpha_1\alpha_2 + 5\alpha_2^2 = (\alpha_1 + \alpha_2)^2 + (2\alpha_2)^2 \overset{def}{=} \beta_1^2 + \beta_2^2 ,$$

тобто

$$\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2 ,\ \beta_2 = 2\alpha_2 ,$$

звідки маємо

$$\alpha_1 = \beta_1 - \frac{\beta_2}{2} ,\ \alpha_2 = \frac{\beta_2}{2} .$$

Тоді матриця B має вигляд

$$B = \begin{Vmatrix} 1 & -\dfrac{1}{2} \\ 0 & \dfrac{1}{2} \end{Vmatrix},$$

а отже

$$S = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \end{Vmatrix} \quad \text{і} \quad \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \end{Vmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \dfrac{-x+y}{2} \end{pmatrix}.$$

За виглядом квадратичної форми для змінних β записуємо вигляд рівняння з частинними похідними, отриманого з рівняння (10) після заміни координат:

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = 0 .$$

Приклад 2.

Звести до канонічного вигляду рівняння

$$u_{xy} = 0 . \qquad (11)$$

Розв'язання. Запишемо квадратичну форму, яка відповідає рівнянню (11):

$$\alpha_1\alpha_2 .$$

Ця квадратична форма може бути зведена до канонічного вигляду за допомогою заміни $\alpha_1 = \beta_1 + \beta_2, \quad \alpha_2 = \beta_1 - \beta_2$. Маємо

$$\alpha_1\alpha_2 = \beta_1^2 - \beta_2^2 .$$

Тоді $B = S = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{Vmatrix}$ і $\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix}$.

Рівняння (11) записується у такому канонічному вигляді:

$$u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} = 0 .$$

§ 3. Зведення до канонічного вигляду квазілінійних рівнянь другого порядку зі змінними коефіцієнтами при старших похідних

Розглянемо рівняння з частинними похідними

$$a(x,y)u_{xx} + 2b(x,y)u_{xy} + c(x,y)u_{yy} + f(x,y,u,\nabla u) = 0 . \qquad (12)$$

Зведення рівняння вигляду (12) до канонічного вигляду можливе за допомогою так званих характеристичних кривих рівняння (12) (їх ще називають характеристиками).

Нехай Ω – область, де рівняння (12) зберігає сталий тип[10]. Назвемо характеристичною кривою для рівняння (12) криву вигляду

$$\varphi(x,y) = const , \qquad (13)$$

де функція φ в області Ω задовольняє співвідношення:

$$\begin{cases} a(x,y)\varphi_x^2 + 2b(x,y)\varphi_x\varphi_y + c(x,y)\varphi_2^2 = 0, \quad (x,y)\in\Omega, \\ \varphi_x^2 + \varphi_y^2 \neq 0, \quad (x,y)\in\Omega \end{cases} \qquad (14)$$

Опишемо методику відшукання функції φ зі співвідношення (14). Враховуючи друге співвідношення у (14), можна стверджувати, що або φ_x, або φ_y не дорівнює 0. Нехай, наприклад, $\varphi_y \neq 0$. Тоді перше співвідношення у (14) може бути записано у вигляді

[10] Про визначення типу рівняння (12) див. у §1 "Класифікація квазілінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними другого порядку".

$$a(x,y)\left(\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)^2+2b(x,y)\frac{\varphi_x}{\varphi_y}+c(x,y)=0\,, \qquad (15)$$

звідки значення $\dfrac{\varphi_x}{\varphi_y}$ можуть бути знайдені як корені квадратного рівняння у вигляді:

$$\frac{\varphi_x}{\varphi_y}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-ac}}{a}\,. \qquad (16)$$

Рівняння для відшукання характеристичної кривої можна записати і в іншому вигляді. Співвідношення (13) неявним чином визначає залежність $y = y(x)$. Якщо продиференціювати (13) по x, враховуючи цю залежність, то можна отримати

$$\varphi_x+\varphi_y\frac{dy}{dx}=0\,,$$

звідки

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\,.$$

Тоді з (16) маємо

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{-b\pm\sqrt{b^2-ac}}{a}\,. \qquad (17)$$

За допомогою інтегрування звичайного диференціального рівняння (17) можемо тепер знайти шукану залежність між x та y, і, як наслідок, функцію $\varphi(x,y)$.

З аналізу виразу $\delta = ac - b^2$ (див. §1) та співвідношення (17) випливає, що:

для рівнянь гіперболічного типу існує два незалежні сімейства дійсних характеристик;
рівняння параболічного типу мають лише одне сімейство дійсних характеристичних кривих;
для еліптичних рівнянь дійсних характеристик не існує (наявні два сімейства комплексних характеристик).

Приклад 1.

Знайти характеристичні криві для рівняння

$$x^2u_{xx}-y^2u_{yy}+xu_x=0$$

в області $x > 0$, $y > 0$.

Розв'язання. З §1 отримуємо, що $\delta = ac - b^2 = -x^2y^2$ і рівняння в області зберігає гіперболічний тип, тобто повинно мати два сімейства характеристик.

Запишемо співвідношення для знаходження характеристичних кривих:

$$x^2\varphi_x^2 - y^2\varphi_y^2 = 0\,,\ \varphi_x^2 + \varphi_y^2 \neq 0\,.$$

Згідно з викладеною вище методикою маємо

$$\left(\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)^2 = \frac{y^2}{x^2}, \quad \frac{\varphi_x}{\varphi_y} = \pm\frac{y}{x}, \quad \frac{dy}{dx} = \pm\frac{y}{x}.$$

Тоді

$$\ln y = \pm\ln x + \ln C\,,$$

звідки

$$xy = const \qquad \text{та} \qquad \frac{x}{y} = const\,.$$

Таким чином, рівняння має два сімейства характеристик, з функціями $\varphi_1(x,y) = xy$ та $\varphi_2(x,y) = \dfrac{x}{y}$.

Приклад 2.

Знайти характеристичні криві для рівняння

$$x^2u_{xx} + 2xyu_{xy} + y^2u_{yy} + xu_x = 0$$

в області $x > 0$, $y > 0$.

Розв'язання. З §1 отримуємо, що $\delta = ac - b^2 = 0$ і рівняння в області зберігає параболічний тип, тобто повинно мати одне сімейство характеристик.

Запишемо співвідношення для знаходження характеристичних кривих:

$$x^2\varphi_x^2 + 2xy\varphi_x\varphi_y + y^2\varphi_y^2 = 0\,,\ \varphi_x^2 + \varphi_y^2 \neq 0\,.$$

Знайдемо характеристики:

$$(x\varphi_x + y\varphi_y)^2 = 0\,,\ \frac{\varphi_x}{\varphi_y} = -\frac{y}{x}\,,\ \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}\,.$$

Тоді $\ln y = \ln x + \ln C$, звідки

$$\frac{x}{y} = const\,.$$

Таким чином, рівняння має одне сімейство характеристик, з функцією $\varphi = \dfrac{x}{y}$.

Приклад 3.

Знайти характеристичні криві для рівняння

$$x^2 u_{xx} + y^2 u_{yy} + x u_x = 0$$

в області $x > 0$, $y > 0$.

Розв'язання. З §1 отримуємо, що $\delta = ac - b^2 = x^2 y^2$ і рівняння в області зберігає еліптичний тип, тобто не має дійсних характеристик.

Запишемо співвідношення для знаходження характеристичних кривих:

$$x^2 \varphi_x^2 + y^2 \varphi_y^2 = 0\,,\ \ \varphi_x^2 + \varphi_y^2 \neq 0\,.$$

Знайдемо характеристики:

$$\left(\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)^2 = -\frac{y^2}{x^2}\,, \qquad \frac{\varphi_x}{\varphi_y} = \pm i\frac{y}{x}\,, \qquad \frac{dy}{dx} = \pm i\frac{y}{x}\,.$$

Тоді

$$\pm i \ln y = \ln x + \ln C\,.$$

Таким чином, рівняння не має дійсних характеристик. У випадку еліптичних рівнянь ще кажуть, що рівняння має комплексні характеристики.

Зокрема, у даному випадку рівняння має комплексні характеристики з функціями $\varphi_{1,2}(x, y) = \ln x \pm i \ln y$.

Можна запропонувати такий **алгоритм зведення рівняння вигляду (12) до канонічного вигляду**:

1. Визначити тип рівняння в області Ω та знайти його характеристики. При цьому
   a. У випадку гіперболічного рівняння отримуємо два сімейства дійсних характеристик з функціями $\varphi_1(x, y)$ та $\varphi_2(x, y)$.
   b. У випадку параболічного рівняння отримуємо одне сімейство дійсних характеристик з функцією $\varphi(x, y)$.
   c. У випадку еліптичного рівняння отримуємо два сімейства комплексних характеристик $\varphi_1(x, y) \pm i\varphi_2(x, y)$.
2. Зробити заміну координат, за допомогою якої рівняння (12) може бути зведено до канонічного вигляду:

a. У випадку гіперболічного рівняння потрібна заміна координат має вигляд $\xi = \varphi_1(x,y)$, $\eta = \varphi_2(x,y)$ (або навпаки, $\xi = \varphi_2(x,y)$, $\eta = \varphi_1(x,y)$, якщо це зручніше).

b. У випадку параболічного рівняння заміна координат визначається формулами $\xi = \varphi(x,y)$, $\eta = \psi(x,y)$ (або навпаки $\xi = \psi(x,y)$, $\eta = \varphi(x,y)$, якщо це зручніше), де функція $\psi(x,y)$ – довільна функція, така, що

$$\det\begin{Vmatrix}\varphi_x & \varphi_y \\ \psi_x & \psi_y\end{Vmatrix} = \varphi_x\psi_y - \psi_x\varphi_y \neq 0,$$

тобто якобіан заміни координат в області Ω не дорівнює нулю (заміна координат є невиродженою).

c. У випадку еліптичного рівняння робимо заміну вигляду $\xi = \varphi_1(x,y)$, $\eta = \varphi_2(x,y)$ (або навпаки, $\xi = \varphi_2(x,y)$, $\eta = \varphi_1(x,y)$, якщо це зручніше).

3. За правилом диференціювання складної функції (див., наприклад [12]) обчислити значення усіх потрібних похідних. Підставити значення усіх знайдених похідних у рівняння:

a. У "гіперболічному" випадку рівняння (12) набуде вигляду

$$u_{\xi\eta} + F(\xi,\eta,u,\nabla u) = 0 .$$

Зауважимо, що це рівняння не є рівнянням у канонічному вигляді з точки зору означення канонічного вигляду у параграфі 2. Однак, до такого вигляду воно може бути легко зведено (див. приклад 2 у § 2). Водночас, отриманий вигляд рівняння більш зручний для його інтегрування. У літературі такий вигляд рівняння часто називають другою канонічною формою гіперболічних рівнянь з двома незалежними змінними[11] (див., наприклад, [8]).

b. У "параболічному" випадку рівняння (12) набуде вигляду

$$u_{\xi\xi} + F(\xi,\eta,u,\nabla u) = 0$$

(у випадку заміни $\xi = \psi(x,y)$, $\eta = \varphi(x,y)$ рівняння (12) набуде вигляду $u_{\eta\eta} + F(\xi,\eta,u,\nabla u) = 0$).

c. У "еліптичному" випадку рівняння (12) набуде вигляду

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + F(\xi,\eta,u,\nabla u) = 0 .$$

[11] Першою канонічною формою при цьому називають канонічний вигляд гіперболічного рівняння згідно з означенням, даним у параграфі 2.

Приклад 4.

Звести рівняння

$$x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} + x u_x = 0$$

до канонічного вигляду в області $x > 0$, $y > 0$.

Розв'язання. З прикладу 1 цього параграфу отримуємо, що рівняння в області зберігає гіперболічний тип та має два сімейства дійсних характеристик, з функціями $\varphi_1(x, y) = xy$ та $\varphi_2(x, y) = \dfrac{x}{y}$.

Виконуємо заміну $\xi = xy$, $\eta = \dfrac{x}{y}$.

За правилом диференціювання складної функції обчислюємо похідні, які містяться у рівнянні:

$$u_x = y u_\xi + \frac{1}{y} u_\eta, \; u_{xx} = y^2 u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + \frac{1}{y^2} u_{\eta\eta},$$

$$u_y = x u_\xi - \frac{x}{y^2} u_\eta, \; u_{yy} = x^2 u_{\xi\xi} - 2\frac{x^2}{y^2} u_{\xi\eta} + \frac{x^2}{y^4} u_{\eta\eta} + \frac{2x}{y^3} u_\eta.$$

Після підстановки в рівняння маємо:

$$x^2\left(y^2 u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + \frac{1}{y^2} u_{\eta\eta} \right) - y^2\left(x^2 u_{\xi\xi} - 2\frac{x^2}{y^2} u_{\xi\eta} + \frac{x^2}{y^4} u_{\eta\eta} + \frac{2x}{y^3} u_\eta \right) +$$

$$+ x\left(y u_\xi + \frac{1}{y} u_\eta \right) = 0$$

або

$$4x^2 u_{\xi\eta} + xy u_\xi - \frac{x}{y} u_\eta = 0.$$

Після ділення на $4x^2$ та заміни змінних остаточно отримуємо

$$u_{\xi\eta} + \frac{1}{4}\left(\frac{u_\xi}{\eta} - \frac{u_\eta}{\xi} \right) = 0.$$

Приклад 5.

Звести рівняння

$$x^2 u_{xx} + 2xy u_{xy} + y^2 u_{yy} + x u_x = 0$$

до канонічного вигляду в області $x > 0$, $y > 0$.

Розв'язання. З прикладу 2 цього параграфу отримуємо, що рівняння в області зберігає параболічний тип, і має одне сімейство дійсних характеристик, що визначається функцією

$$\varphi(x,y)=\frac{x}{y}.$$

Виконуємо заміну $\xi=\frac{x}{y}$, $\eta=y$. Якобіан цієї заміни не дорівнює нулю в області $x>0$, $y>0$.

Обчислюємо похідні, які містяться у рівнянні:

$$u_x=\frac{1}{y}u_\xi,\ u_{xx}=\frac{1}{y^2}u_{\xi\xi},$$

$$u_y=-\frac{x}{y^2}u_\xi+u_\eta,\ u_{yy}=\frac{x^2}{y^4}u_{\xi\xi}-\frac{2x}{y^2}u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}+\frac{2x}{y^3}u_\xi,$$

$$u_{xy}=-\frac{x}{y^3}u_{\xi\xi}+\frac{1}{y}u_{\xi\eta}-\frac{1}{y^2}u_\xi.$$

Після підстановки обчислених похідних у рівняння отримаємо:

$$\frac{x^2}{y^2}u_{\xi\xi}+2xy\left(-\frac{x}{y^3}u_{\xi\xi}+\frac{1}{y}u_{\xi\eta}-\frac{1}{y^2}u_\xi\right)+$$

$$+y^2\left(\frac{x^2}{y^4}u_{\xi\xi}-\frac{2x}{y^2}u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}+\frac{2x}{y^3}u_\xi\right)+\frac{x}{y}u_\xi=0,$$

або

$$y^2u_{\eta\eta}+\frac{x}{y}u_\xi=0.$$

Після ділення на y^2 та заміни змінних остаточно отримуємо

$$u_{\eta\eta}+\frac{\xi}{\eta^2}u_\xi=0.$$

Приклад 6.

Звести рівняння

$$x^2u_{xx}+y^2u_{yy}+xu_x=0$$

до канонічного вигляду в області $x>0$, $y>0$.

Розв'язання. З прикладу 3 цього параграфу маємо, що рівняння в області зберігає еліптичний тип і має два сімейства комплексних характеристик з дійсною частиною $\varphi_1(x,y)=\ln x$ та уявною частиною $\varphi_2(x,y)=\ln y$.

Робимо заміну $\xi=\ln x$, $\eta=\ln y$.

Обчислюємо потрібні похідні:

$$u_x = \frac{1}{x} u_\xi \, , \; u_{xx} = \frac{1}{x^2} u_{\xi\xi} - \frac{1}{x^2} u_\xi \, ,$$

$$u_y = \frac{1}{y} u_\eta \, , \; u_{xx} = \frac{1}{y^2} u_{\eta\eta} - \frac{1}{y^2} u_\eta \, .$$

Після підстановки обчислених похідних у рівняння отримаємо:

$$x^2 \left(\frac{1}{x^2} u_{\xi\xi} - \frac{1}{x^2} u_\xi \right) + y^2 \left(\frac{1}{y^2} u_{\eta\eta} - \frac{1}{y^2} u_\eta \right) + x \frac{1}{x} u_\xi = 0$$

або

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} - u_\eta = 0 \, .$$

§ 4. Знаходження загальних розв’язків рівнянь з частинними похідними

Нехай коефіцієнти рівнянь

$$A(x,y) u_x + B(x,y) u_y + F(x,y,u) = 0 \qquad (18)$$

$$a(x,y) u_{xx} + 2b(x,y) u_{xy} + c(x,y) u_{yy} + f(x,y,u,\nabla u) = 0 \, , \qquad (19)$$

неперервні у деякій області Ω.

Функція *u* (*x*, *y*) називається розв’язком рівняння (18), якщо вона належить до класу $C^1(\Omega)$ і задовольняє рівняння (18) в області Ω. Множина усіх розв’язків рівняння (18) називається загальним розв’язком рівняння (18).

Функція *u* (*x*, *y*) називається розв’язком рівняння (19), якщо вона належить до класу $C^2(\Omega)$ і задовольняє рівняння (19) в області Ω. Множина усіх розв’язків рівняння (19) називається загальним розв’язком рівняння (19).

Приклад 1.

Знайти загальний розв’язок рівняння[12] $u_x = 0$ в R^2.

Розв’язання. Оскільки *u* = *u* (*x*, *y*), а $u_x = 0$, то $u = \varphi(y)$, де φ – довільна неперервно диференційована функція одної змінної. Отже, загальний розв’язок даного рівняння – $u = \varphi(y)$.

Приклад 2.

Знайти загальний розв’язок рівняння

$$u_x = u \, , \quad (x,y) \in R^2 \, . \qquad (20)$$

---

[12] Тут і далі $u = u\,(x, y)$.

Розв'язання. В аналогічному випадку звичайне диференціальне рівняння[13] можна розв'язати так:

$$\frac{du}{dx} = u \Leftrightarrow \frac{du}{u} = dx \Leftrightarrow \ln u = x + \ln c \Leftrightarrow u = ce^{x}.$$

Аналіз наведеного розв'язання звичайного диференціального рівняння з урахуванням специфіки рівнянь з частинними похідними та прикладу 1 дозволяє знайти загальний розв'язок для рівняння (20) так:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u \Leftrightarrow \frac{du}{u} = dx,\ u = u(x,y) \Leftrightarrow \ln u = x + \ln \varphi(y) \Leftrightarrow u = \varphi(y)e^{x}.$$

Отже, загальний розв'язок даного рівняння (10) $u = \varphi(y)e^{x}$, де φ – довільна неперервно диференційована функція одної змінної.

Приклад 3.

Знайти загальний розв'язок рівняння

$$u_x = u - x, \quad (x,y) \in R^2 \tag{21}$$

Розв'язання. Як відомо (див. [9]), загальний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння може бути знайдено як суму загального розв'язку відповідного йому однорідного рівняння та частинного розв'язку неоднорідного рівняння.

Однорідне рівняння, яке відповідає рівнянню (21) – це рівняння (20) з прикладу 2 цього параграфу. З прикладу 2, загальний розв'язок однорідного рівняння (20) може бути знайдено за формулою:

$$u_{зро} = \varphi(y)e^{x},$$

де φ – довільна неперервно диференційована функція одної змінної.

Спробуємо знайти частинний розв'язок рівняння (21) у вигляді $u = \alpha x + \beta$ (пошук частинного розв'язку для рівняння (21) саме у такому вигляді зумовлений тим, що коефіцієнти, похідні та вільний член залежать лише від x, а неоднорідність має лінійних характер). Маємо $\alpha = \alpha x + \beta - x$, звідки $\alpha = 1$, $\beta = 1$.

Отже, частинним розв'язком рівняння (21) є функція

$$u_{чрн} = x + 1.$$

Таким чином, загальний розв'язок рівняння (21) може бути знайдено за формулою

$$u = \varphi(y)e^{x} + x + 1,$$

де φ – довільна неперервно диференційована функція одної змінної.

---

[13] Більш детальну інформацію про розв'язання звичайних диференціальних рівнянь та рівнянь з частинними похідними першого порядку можна знайти у [15 – 17].

Приклад 4.

Знайти загальний розв'язок рівняння

$$A(x,y)u_x + B(x,y)u_y = 0\,, \tag{22}$$

в області Ω, якщо $A(x,y) \neq 0$ в Ω.

Розв'язання. Характеристичною кривою для рівняння (22) будемо називати таку криву $\varphi(x,y) = const$, що

$$\begin{cases} A(x,y)\varphi_x + B(x,y)\varphi_y = 0, \quad (x,y) \in \Omega, \\ \varphi_x^2 + \varphi_y^2 \neq 0, \quad (x,y) \in \Omega. \end{cases}$$

За аналогією з методикою відшукання характеристичних кривих, розглянутою у параграфі 2, маємо такі співвідношення

$$A(x,y)\frac{\varphi_x}{\varphi_y} = -B(x,y)\,,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B(x,y)}{A(x,y)}\,. \tag{23}$$

Рівняння (23) є звичайним диференціальним рівнянням. Розв'язавши його, можна знайти залежність між *x* та *y*, і, як наслідок, визначити функцію $\varphi(x,y)$. Важливим у подальшому є те, що $\dfrac{\varphi_x}{\varphi_y} = -\dfrac{B(x,y)}{A(x,y)}$.

Для знаходження загального розв'язку рівняння (22) слід зробити заміну

$$\xi = \varphi(x,y)\,,\ \eta = \psi(x,y)\,,$$

де $\varphi(x,y)$ – функція, знайдена з (23), $\psi(x,y)$ – довільна функція, така щоб якобіан заміни не дорівнював нулю в області Ω.

Після виконання заміни змінних отримаємо

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = u_\xi \varphi_x + u_\eta \psi_x\,,$$

$$u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y = u_\xi \varphi_y + u_\eta \psi_y\,.$$

Підстановка отриманих співвідношень у рівняння (22) дає

$$A(x,y)(u_\xi \varphi_x + u_\eta \psi_x) + B(x,y)(u_\xi \varphi_y + u_\eta \psi_y) = 0\,,$$

або, з урахуванням властивостей функції $\varphi(x,y)$, тобто рівності (23), маємо

$$u_\xi \left(A(x,y)\varphi_x - B(x,y)\frac{A(x,y)}{B(x,y)}\varphi_x \right) + u_\eta(\psi_x + \psi_y) = 0\,,$$

тобто

$$u_\eta = 0\,.$$

З останнього рівняння та прикладу 1 маємо, що загальний розв'язок рівняння (22) має вигляд

$$u = f(\xi) = f(\varphi(x, y)),$$

де f – довільна один раз неперервно диференційовна функція одної змінної.

Приклад 5.

Знайти загальний розв'язок рівняння

$$u_{xy} = 0, \quad (x, y) \in R^2.$$

Розв'язання. З прикладу 1 цього параграфу маємо

$$u_x = \varphi(x),$$

$$u = \int \varphi(x)dx + \psi(y) = \varphi(x) + \psi(y).$$

В останньому співвідношенні введено перепозначення $\int \varphi(x)dx$ на $\varphi(x)$ з метою уникнення додаткових індексів.

Отже, загальний розв'язок рівняння має вигляд $u = \varphi(x) + \psi(y)$, де φ, ψ – довільні двічі неперервно диференційовні функції одної змінної[14].

Приклад 6.

Знайти загальний розв'язок рівняння

$$u_{xx} - 5u_{xy} + 6u_y = 0, \quad (x, y) \in R^2 \tag{24}$$

Розв'язання. У даному випадку зручно скористатись методикою зведення до канонічного вигляду для рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

Квадратична форма, яка відповідає рівнянню (24), має вигляд

$$\alpha_1^2 - 5\alpha_1\alpha_2 + 6\alpha_2^2 = (\alpha_1 - 2\alpha_2)(\alpha_1 - 3\alpha_2) = \beta_1\beta_2,$$

де $\beta_1 = \alpha_1 - 2\alpha_2$, $\beta_2 = \alpha_1 - 3\alpha_2$.

За методикою, викладеною у пункті 3 алгоритму зведення рівнянь другого порядку зі сталими коефіцієнтами до канонічного вигляду (параграф 2), можемо знайти заміну координат, яка відповідає заміні у квадратичній формі:

$$\alpha_1 = 3\beta_1 - 2\beta_2, \ \alpha_2 = -\beta_1 + \beta_2.$$

$$B = \begin{Vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{Vmatrix}, \quad S = B^T = \begin{Vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{Vmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x - y \\ -2x + y \end{pmatrix}.$$

З відповідності квадратичної форми та рівняння зі сталими коефіцієнтами отримуємо, що після виконання знайденої заміни змінних рівняння (24) набуде вигляду

---

[14] Насправді у даному випадку досить, щоб функції φ, ψ були лише один раз неперервно диференційовними.

$$u_{\xi\eta} = 0 .$$

З прикладу 5 цього параграфу отримуємо, що загальний розв'язок рівняння (24) має вигляд

$$u = \varphi(\xi) + \psi(\eta) = \varphi(3x - y) + \psi(-2x + y),$$

де $\varphi,\ \psi$ – довільні двічі неперервно диференційовні функції одної змінної.

Приклад 7.

Знайти загальний розв'язок рівняння

$$u_{xy} - u_y = 0, \quad (x, y) \in R^2. \tag{20}$$

Розв'язання. Введемо позначення $v = u_y$. Тоді рівняння (20) отримує вигляд $v_x - v = 0$. З прикладу 2 цього параграфу маємо $v = \varphi(y)e^x$, тобто $u_y = \varphi(y)e^x$ і

$$u = e^x \int \varphi(y)dy + \psi(x) = e^x \varphi(y) + \psi(x) .$$

В останньому співвідношенні введено перепозначення $\int \varphi(x)dx$ на $\varphi(x)$ з метою уникнення додаткових індексів.

Отже, загальний розв'язок рівняння має вигляд $u = e^x \varphi(y) + \psi(x)$, де $\varphi,\ \psi$ – довільні двічі неперервно диференційовні функції одної змінної.

Приклад 8.

Знайти загальний розв'язок рівняння

$$u_{xy} + xu_x = 0, \quad (x, y) \in R^2 \tag{21}$$

Розв'язання. Введемо позначення $v = u_x$. Тоді рівняння (21) отримує вигляд

$$v_y + xv = 0.$$

Останнє рівняння нескладно розв'язати

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -xv \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dv}{v} = -xdy, v = v(x, y) \quad \Leftrightarrow \quad v = \varphi(x)e^{-xy},$$

де φ – довільна неперервно диференційовна функція одної змінної.

Оскільки

$$u_x = v = \varphi(x)e^{-xy},$$

то загальний розв'язок рівняння (21) може бути знайдений у вигляді

$$u = \int \varphi(x)e^{-xy}dx + \psi(y),$$

де φ – довільна неперервно диференційовна функція одної змінної, ψ – довільна двічі неперервно диференційовна функція одної змінної[15].

Задачі для практичних занять та самостійної роботи

Задачі до § 1

У задачах №№ 1 – 5 вказати області, де рівняння зберігає сталий тип.

1. $u_{xx} + xu_{yy} = 0$.
2. $u_{xx} + yu_{yy} + \frac{1}{2}u_y = 0$.
3. $yu_{xx} + xu_{yy} = 0$.
4. $x^2u_{xx} + 2xyu_{xy} + y^2u_{yy} = 0$.
5. $4y^2u_{xx} - e^{2x}u_{yy} - 4y^2u_x = 0$.

У задачах №№ 6 – 8 визначити тип рівняння.

6. $u_{xx} + 2u_{xy} - 2u_{xz} + 2u_{yy} + 6u_{zz} = 0$.
7. $4u_{xx} - 4u_{xy} - 2u_{yz} + u_y + u_z = 0$.
8. $u_{xy} - u_{xz} + u_x + u_y - u_z = 0$.

Задачі до § 2

У задачах №№ 9 –23 звести до канонічного вигляду рівняння.

9. $u_{xx} + 2u_{xy} - 2u_{xz} + 2u_{yy} + 6u_{zz} = 0$.
10. $4u_{xx} - 4u_{xy} - 2u_{yz} + u_y + u_z = 0$.
11. $u_{xy} - u_{xz} + u_x + u_y - u_z = 0$.
12. $u_{xx} + 2u_{xy} - 2u_{xz} + 2u_{yy} + 2u_{zz} = 0$.
13. $u_{xx} + 2u_{xy} - 4u_{xz} - 6u_{yz} - u_{zz} = 0$.
14. $u_{xx} + 2u_{xy} + 2u_{yy} + 2u_{yz} + 2u_{yt} + 2u_{zz} + 3u_{tt} = 0$.
15. $u_{xy} - u_{xt} + u_{zz} - 2u_{zt} + 2u_{tt} = 0$.
16. $u_{xy} + u_{xz} + u_{xt} + u_{zt} = 0$.

---

[15] Насправді у даному випадку досить, щоб функція ψ була лише один раз неперервно диференційовна.

17. $u_{xx} + 2u_{xy} - 2u_{xz} - 4u_{yz} + 2u_{yt} + u_{zz} = 0$.

18. $u_{xx} + 2u_{xz} - 2u_{xt} + u_{yy} + 2u_{yz} + 2u_{yt} + 2u_{zz} + 2u_{tt} = 0$.

19. $u_{x_1x_1} + 2\sum_{k=2}^{n} u_{x_kx_k} - 2\sum_{k=1}^{n-1} u_{x_kx_{k+1}} = 0$.

20. $u_{x_1x_1} - 2\sum_{k=2}^{n} (-1)^k u_{x_{k-1}x_k} = 0$.

21. $\sum_{k=1}^{n} k u_{x_kx_k} + 2\sum_{l<k} l u_{x_lx_k} = 0$.

22. $\sum_{k=1}^{n} u_{x_kx_k} + \sum_{l<k} u_{x_lx_k} = 0$.

23. $\sum_{l<k} u_{x_lx_k} = 0$.

Задачі до § 3

У задачах №№ 24 – 42 звести рівняння до канонічного вигляду у кожній з областей, де воно зберігає тип.

24. $u_{xx} + xu_{yy} = 0$.

25. $u_{xx} + yu_{yy} = 0$.

26. $u_{xx} + yu_{yy} + \frac{1}{2}u_y = 0$.

27. $yu_{xx} + xu_{yy} = 0$.

28. $xu_{xx} + yu_{yy} = 0$.

29. $u_{xx} + xyu_{yy} = 0$.

30. $u_{xx} \operatorname{sign} y + 2u_{xy} + u_{yy} = 0$.

31. $u_{xx} + 2u_{xy} + (1 - \operatorname{sign} y)u_{yy} = 0$.

32. $u_{xx} \operatorname{sign} y + 2u_{xy} + u_{yy} \operatorname{sign} x = 0$.

33. $y^2u_{xx} - x^2u_{yy} = 0$.

34. $x^2u_{xx} - y^2u_{yy} = 0$.

35. $x^2u_{xx} + y^2u_{yy} = 0$.

36. $y^2u_{xx} + x^2u_{yy} = 0$.

37. $y^2u_{xx} + 2xyu_{xy} + x^2u_{yy} = 0$.

38. $x^2u_{xx} + 2xyu_{xy} + y^2u_{yy} = 0$.

39. $4y^2u_{xx} - e^{2x}u_{yy} - 4y^2u_x = 0$.

40. $x^2u_{xx} + 2xyu_{xy} - 3y^2u_{yy} - 2xu_x + 4yu_y + 16x^4u = 0$.

41. $(1+x^2)u_{xx} + (1+y^2)u_{yy} + xu_x + yu_y = 0$.

42. $u_{xx}\sin^2 x - 2xu_{xy}\sin x + y^2u_{yy} = 0$.

Задачі до § 4

У задачах №№ 43 –49 знайти загальний розв'язок рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

43. $u_{xx} - a^2u_{yy} = 0$.

44. $u_{xx} - 2u_{xy} - 3u_{yy} = 0$.

45. $u_{xy} + au_x = 0$.

46. $3u_{xx} - 5u_{xy} - 2u_{yy} + 3u_x + u_y = 2$.

47. $u_{xy} + au_x + bu_y + ab\,u = 0$.

48. $u_{xy} - 2u_x - 3u_y + 6u = 2e^{x+y}$.

49. $u_{xx} + 2au_{xy} + a^2u_{yy} + u_x + au_y = 0$.

У задачах №№ 50 – 57 знайти загальний розв'язок рівняння у кожній з областей, де воно зберігає тип.

50. $yu_{xx} + (x-y)u_{xy} - xu_{yy} = 0$.

51. $x^2u_{xx} - y^2u_{yy} = 0$.

52. $x^2u_{xx} + 2xyu_{yy} - 3y^2u_{yy} - 2xu_x = 0$.

53. $x^2u_{xx} + 2xyu_{xy} + y^2u_{yy} = 0$.

54. $u_{xy} - xu_x + u = 0$.

55. $u_{xy} + 2xyu_y - 2xu = 0$.

56. $u_{xy} + u_x + yu_y + (y-1)u = 0$.

57. $u_{xy} + xu_x + 2yu_y + 2xyu = 0$.

58. Довести, що рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$u_{xy} + au_x + bu_y + cu = 0$$

за допомогою заміни $u(x, y) = v(x, y)e^{-bx-ay}$ зводиться до вигляду $v_{xy} + (c - ab)v = 0$

Довести, що загальний розв'язок рівняння $u_{xy} = u$ має вигляд

$$u(x, y) = \int_0^x f(t)J_0(2i\sqrt{y(x-t)})dt +$$

$$+\int_0^y g(t)J_0(2i\sqrt{x(y-t)})dt + [f(0) + g(0)]J_0(2i\sqrt{xy}),$$

де $J_0(z)$ – функція Бесселя, а f та g – довільні функції класу C^1.

У задачах №№ 59 – 67 знайти загальний розв'язок рівняння.

59. $u_{xx} - 2\sin x\, u_{xy} - \cos^2 x\, u_{yy} - \cos x\, u_y = 0$.

60. $xu_{xx} - yu_{yy} + \dfrac{1}{2}(u_x - u_y) = 0$, $x > 0$, $y > 0$.

61. $x^2u_{xx} - y^2u_{yy} - 2yu_y = 0$.

62. $x^2u_{xx} - 2xyu_{xy} + y^2u_{yy} + xu_x + yu_y = 0$.

63. $(x^2u_x)_x = x^2u_{yy}$.

64. $(x - y)u_{xy} - u_x + u_y = 0$.

65. $u_{xy} + yu_x + xu_y + xyu = 0$.

66. $x^2 u_{xx} + 2xy\, u_{xy} + y^2 u_{yy} + 2yz\, u_{yz} + z^2u_{zz} + 2xz\, u_{xz} = 0$.

67. $u_{tt} = a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy}$, ($a_{11}a_{22} = a_{12}^2$), де a_{11}, a_{12}, a_{22} – додатні числа.

68. Показати, що за виконання умови

$$a_{11}b_2^2 - 2a_{12}b_1b_2 + a_{22}b_1^2 + 4\delta\, c = 0, \qquad (*)$$

де $\delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$, рівняння

$$L(u) + cu = 0, \qquad (**)$$

з оператором

$$L(u) = a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + b_2u_y + cu = 0,$$

має загальний розв'язок вигляду

$$u(x, y) = e^{\frac{kx+my}{2\delta}}[\psi_1(\alpha_1 x - y) + \psi_2(\alpha_2 x - y)],$$

де ψ, ψ_2 – довільні функції, $k = a_{22}b_1 - a_{12}b_2$, $m = a_{11}b_2 - a_{12}b_1$, а α_1, α_2 – корені рівняння $a_{11}\alpha^2 - 2a_{12}\alpha + a_{22} = 0$.

Якщо ж умова (*) задачі не виконана, то звести рівняння (**) до вигляду

$$v_{\xi\eta} = d\, v, \qquad (***)$$

де $d = \dfrac{a_{11}^2(\alpha_1 b_1 - b_2)(\alpha_2 b_1 - b_2) + 4a_{11}c\delta}{16\delta^2}$, $\xi = \alpha_1 x - y$, $\eta = \alpha_2 x - y$.

Загальний розв'язок рівняння вигляду (***) наведено у задачі 58.

69. Показати, що для довільного натурального *n* загальний розв'язок рівняння

$$\frac{2}{2n+1}xu_{xx} - u_{yy} + u_x = 0$$

має вигляд

$$u = \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\left[\frac{F_1(\sqrt{2(2n+1)x} + y) + F_2(\sqrt{2(2n+1)x} - y)}{\sqrt{x}}\right],$$

де F_1, F_2 – довільні *n* – 1 раз неперервно диференційовні функції.

70. Показати, що для довільного натурального *n* рівняння

$$\frac{1}{a^2}u_{tt} = u_{xx} + \frac{2}{x}u_x - \frac{n(n+1)}{x^2}u$$

має загальний розв'язок вигляду

$$u = x^n\left(\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\right)^n\left[\frac{\Phi(x - at) + \Psi(x + at)}{x}\right],$$

де Φ, Ψ – довільні двічі неперервно диференційовні функції.

71. Показати, що для довільних натуральних *n*, *m* рівняння

$$u_{xy} - \frac{n}{x - y}u_x + \frac{m}{x - y}u_y = 0$$

має загальний розв'язок вигляду

$$u(x,y)=\frac{\partial^{m+n-2}}{\partial x^{m-1}\partial y^{n-1}}\left[\frac{X(x)-Y(y)}{x-y}\right],$$

де $X(x)$, $Y(y)$ – довільні *n* + *m* разів неперервно диференційовні функції.

72. Показати, що для довільних натуральних *n*, *m* рівняння

$$u_{xy}+\frac{n}{x-y}u_x-\frac{m}{x-y}u_y=0$$

має загальний розв'язок вигляду

$$u(x,y)=(y-x)^{m+n+1}\frac{\partial^{m+n}}{\partial x^{n}\partial y^{m}}\left[\frac{X(x)-Y(y)}{x-y}\right],$$

де $X(x)$, $Y(y)$ – довільні *n* + *m* + 2 рази неперервно диференційовні функції.

73. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$u_{yy}-y^m u_{xx}+\frac{p}{y}u_y=0,\ y\ge 0,\ 0\le p<1.$$

Література

1. Сборник задач по уравнениям математической физики / под ред. В.С. Владимирова. – М. Наука, 1974. – 272 с.
2. Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. Сборник задач по математической физике. – М.: Наука, 1972. – 687 с.
3. Вірченко Н.О. Основні методи розв’язання задач математичної фізики. – Навчальний посібник. – Київ: КПІ, 1997. – 370 с.
4. Бицадзе А.В. Калиниченко Д.Ф. Сборник задач по уравнениям математической физики. – М.: Наука, 1977. – 224 с.
5. Смирнов М.М. Задачи по уравнениям математической физики. – М.: Наука, 1975. – 127 с.
6. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1981. – 512 с.
7. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1977. – 736 с.
8. Соболев С.Л. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1966. – 444 с.
9. Гончаренко В.М. Основи теорії рівнянь з частинними похідними. – К.: Вища школа, 1995. – 350 с.
10. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. – М. Наука, 1983. – 424 с.
11. Перестюк М.О., Маринець В.В. Теорія рівнянь математичної фізики. – К: Либідь, 2001 р. – 334 с.
12. Положий Г.Н. Уравнения математической физики. – М.: Высш. шк., 1964. – 559 с.
13. Михлин С.Г. Курс математической физики. – М.: Наука, 1968. – 576 с.
14. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. – М.: Физматгиз, 1963. – 432 с.
15. Дороговцев А.Я. Математический анализ. Справочное пособие. – К.: Вища школа, 1985. – 528 с.
16. Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения: примеры и задачи. – М.: Высш. шк., 1989. – 383 с.
17. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. – М.: ГИФМЛ, 1958. – 468 с.
18. Самойленко А.М., Перестюк М.О., Парасюк І.О. Диференціальні рівняння. – К.: Либідь, 1994. – 360 с.

Зміст