

Київський національний університет імені Тараса Шевченка  
Механіко-математичний факультет  
Кафедра математичної фізики

В.В.Попов  
Практичні роботи з дисципліни "Методи обчислень"  
(частина II )

Київ-2008

Практична робота №1 "Чисельне інтегрування звичайних диференціальних рівнянь.  
Метод типу Рунге-Кутта"

*Постановка задачі*

З точністю  $\varepsilon = 10^{-4}$  застосовуючи автоматичний крок інтегрування на проміжку  $[0, 1]$  знайти розв'язок задачі Коші

$$\begin{cases} u' = f(x, u, v), \\ v' = g(x, u, v), \\ u(0) = A, \quad v(0) = B \end{cases}$$

методом типу Рунге-Кутта 4-го порядку точності.

*Варіанти*

- 1)  $f = \sin(x+u) + pv$ ;  $g = qv - (x+v)^2$ ,  $A = 0.5$ ,  $B = 1$
- 2)  $f = \sin(pu^2) + x + v$ ;  $g = x + u - qv^2 + 1$ ,  $A = 1$ ,  $B = 0.5$
- 3)  $f = \sqrt{x^2 + pu^2} + v$ ;  $g = \cos(qv) + u$ ,  $A = 0.5$ ,  $B = 1$
- 4)  $f = \cos(u + pv) + q$ ;  $g = \frac{p}{x + qu^2} + x + 1$ ,  $A = 1$ ,  $B = 0.05$

*Параметри*

$$\begin{aligned} p &= 1, 2, 3, 4, 5; \\ q &= 1, 2, 3, 4, 5; \end{aligned}$$

*Визначення завдання*

Завдання визначається трьома цифрами:  $i.p.q$ , де  $i$  - номер варіанту. Наприклад, завдання 2.1.5 означає варіант 2, параметри  $p = 1$ ,  $q = 5$ .

*Формули*

Формули типу Рунге-Кутта 4-го порядку точності обчислення наближеного розв'язку  $y(x+h)$ ,  $z(x+h)$ :

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= hf(x, u, v); & \psi_0 &= hg(x, u, v); \\ \varphi_1 &= hf(x+h/2, u+\varphi_0/2, v+\psi_0/2); & \psi_1 &= hg(x+h/2, u+\varphi_0/2, v+\psi_0/2); \\ \varphi_2 &= hf(x+h/2, u+\varphi_1/2, v+\psi_1/2); & \psi_2 &= hg(x+h/2, u+\varphi_1/2, v+\psi_1/2); \\ \varphi_3 &= hf(x+h, u+\varphi_2, v+\psi_2); & \psi_3 &= hg(x+h, u+\varphi_2, v+\psi_2); \\ y(x+h) &= y(x) + (\varphi_0 + 2\varphi_1 + 2\varphi_2 + \varphi_3)/6; \\ z(x+h) &= z(x) + (\psi_0 + 2\psi_1 + 2\psi_2 + \psi_3)/6. \end{aligned}$$

*Поправка Рунге*

$$R_y = \frac{y_{h/2} - y_h}{2^p - 1}, \quad R_z = \frac{z_{h/2} - z_h}{2^p - 1},$$

де  $p = 5$  - локальний порядок методу.

$$y_{h/2} \leftarrow y_{h/2} + R_y, \quad z_{h/2} \leftarrow z_{h/2} + R_z$$

## Події та їх властивості

Подія	Властивість
$(R_y > \varepsilon) \vee (R_y > \varepsilon)$	розв'язок $y(x+h), z(x+h)$ не приймається, крок $h \leftarrow h/2$
$(R_y \leq \varepsilon) \wedge (R_y \leq \varepsilon)$	розв'язок $y(x+h), z(x+h)$ приймається, крок $h$ не змінюється
$(R_y \ll \varepsilon) \wedge (R_y \ll \varepsilon)$	розв'язок $y(x+h), z(x+h)$ приймається, крок $h \leftarrow 2h$

Примітка:  $(R_y \ll \varepsilon) \equiv R_y < \varepsilon/2^p$ .

## Приклад

З точністю  $\varepsilon = 10^{-4}$  застосовуючи автоматичний крок інтегрування на проміжку  $[1, 2]$ , знайти розв'язок задачі Коші

$$\begin{cases} u' = \frac{v-u}{x}, \\ v' = \frac{v+u}{x}, \\ u(1) = 1, \quad v(1) = 1 \end{cases}$$

методом типу Рунге-Кутта 4-го порядку точності. Фрагмент обчислень прикладу в MS Excel (тільки формули метода типу Рунге-Кутта 4-го порядку точності!)

	A	B	C	D	E	F
1			$h$			
2			0,2			
3		$x$	$u$	$v$	$\varphi$	$\psi$
4		1	1	1		
5		=B4	=C4	=D4	=(D5-C5)/B5*C\$2	=(D5+C5)/B5*C\$2
6	0,5	=B\$4+C\$2*A6	=C\$4+\$A6*E5	=D\$4+\$A6*F5	=(D6-C6)/B6*C\$2	=(D6+C6)/B6*C\$2
7	0,5	=B\$4+C\$2*A7	=C\$4+\$A7*E6	=D\$4+\$A7*F6	=(D7-C7)/B7*C\$2	=(D7+C7)/B7*C\$2
8	1	=B\$4+C\$2*A8	=C\$4+\$A8*E7	=D\$4+\$A8*F7	=(D8-C8)/B8*C\$2	=(D8+C8)/B8*C\$2
9			=(E5+2*E6+2*E7+E8)/6	=(F5+2*F6+2*F7+F8)/6		
10			=C4+C9	=D4+D9		

Фрагмент програми обчислень прикладу в Pascal

```

{$F+}
uses crt;
const n_max    = 100;
      n_system= 2;
      epsilon = 1.0E10-4;
type s_vector = array [1..n_system] of real;
      func     = function(i:integer; x:real; w:s_vector):real;
var a,b,h,x,x1      : real;
    ww,w,w1,w2,wl2,r : s_vector;
    i                : integer;
    file_in,file_out : text;
    h_found          : boolean;
function f(i:integer; x:real; w:s_vector):real;
begin
  case i of
    1: f:=(w[2]-w[1])/x;
    2: f:=(w[2]+w[1])/x
  end
end;
procedure add_vector(u,v: s_vector; var w: s_vector);
var i:integer;
begin
  for i:=1 to n_system do
    w[i]:=u[i]+v[i]
  end;
procedure prop_vector(u: s_vector; k: real; var v: s_vector);
var i:integer;
begin
  for i:=1 to n_system do
    v[i]:=k*u[i]
  end;
procedure rk4(x,h:real; f:func; var w:s_vector);
var xx,yy : real;
    fi0,fi1,fi2,fi3,v1,v2 : s_vector;
    i                      : integer;
begin
  for i:=1 to n_system do fi0[i]:=h*f(i,x,w);
  prop_vector(fi0,0.5,v1); add_vector(w,v1,v2);
  for i:=1 to n_system do fi1[i]:=h*f(i,x+h/2,v2);
  prop_vector(fi1,0.5,v1); add_vector(w,v1,v2);
  for i:=1 to n_system do fi2[i]:=h*f(i,x+h/2,v2);
  prop_vector(fi2,1,v1); add_vector(w,v1,v2);
  for i:=1 to n_system do fi3[i]:=h*f(i,x+h,v2);
  for i:=1 to n_system do
w[i]:=w[i]+(fi0[i]+2*fi1[i]+2*fi2[i]+fi3[i])/6
  end;
procedure delta_runge(u1,u2: s_vector; var delta: s_vector);
var i:integer;
    z:real;
begin
  z:=31;{2^p-1, p=5}
  for i:=1 to n_system do
    delta[i]:=(u1[i]-u2[i])/z
  end;
function h_analiz(delta: s_vector):integer; {-1, 0, 1}
var i      : integer;
    z,ez   : real;
    t_1,t0,t1: boolean;
begin
  z:=32;{2^p, p=5}
  ez:=epsilon/z;
  t_1:=true; t0:=true; t1:=true;
  for i:=1 to n_system do
  begin

```

```

t_1:=t_1 and (delta[i]>=epsilon);
t0:=t0 and (delta[i]<epsilon) and (delta[i]>=ez);
t1:=t1 and (delta[i]<ez);
end;
if t_1 then h_analiz:=-1;
if t0 then h_analiz:=0;
if t1 then h_analiz:=1
end;
procedure print_rk(x:real;w:s_vector);
var i:integer;
begin
write(x:12:4);
write(file_out,x:12:4);
for i:=1 to n_system do
begin
write(w[i]:12:4);
write(file_out,w[i]:12:4);
end;
writeln;
writeln(file_out)
end;
BEGIN
clrscr;
assign(file_out,'rk_out.dat');
rewrite(file_out);
assign(file_in,'rk_in.dat');
reset(file_in);
readln(file_in,a,b);
for i:=1 to n_system do
readln(file_in,w[i]);
x:=a; h:=(b-a)/10;
writeln('x':8,'y':12,'z':12);
writeln(file_out,'x':8,'y':12,'z':12);
writeln('-----');
writeln(file_out,'-----');
print_rk(x,w);
while b-x>0 do
begin
if x+h>b then h:=b-x;
h_found:=false;
i:=0;
while not h_found do
begin
i:=i+1;
x1:=x;
if i=1
then
begin
w1:=w;
RK4(x1,h,f,w1)
end
else
w1:=w12;
w12:=w;
RK4(x1,h/2,f,w12);
x1:=x+h/2;
w2:=w12;
RK4(x1,h/2,f,w2);
delta_runge(w1,w2,r);
i:=h_analiz(r);
h_found:=i>=0;
if i=-1 then h:=h/2
end;
add_vector(w2,r,w);x:=x+h;

```

```
print_rk(x,w);  
if i=1 then h:=2*h;  
if x+h>b then h:=b-x;  
end;  
close(file_in); close(file_out)  
END.
```

Практична робота №2 "Чисельне інтегрування звичайних диференціальних рівнянь.  
Метод типу Адамса"

*Постановка задачі*

На проміжку  $[0, 1]$ , знайти розв'язок задачі Коші

$$\begin{cases} u' = f(x, u, v), \\ v' = g(x, u, v), \\ u(0) = A, \quad v(0) = B \end{cases}$$

багатокроковим методом Адамса 4-го порядку точності (схема "предиктор-коректор").

*Варіанти*

- 1)  $f = \sin(x + u) + pv$ ;  $g = qv - (x + v)^2$ ,  $A = 0.5$ ,  $B = 1$
- 2)  $f = \sin(pu^2) + x + v$ ;  $g = x + u - qv^2 + 1$ ,  $A = 1$ ,  $B = 0.5$
- 3)  $f = \sqrt{x^2 + pu^2} + v$ ;  $g = \cos(qv) + u$ ,  $A = 0.5$ ,  $B = 1$
- 4)  $f = \cos(u + pv) + q$ ;  $g = \frac{p}{x + qu^2} + x + 1$ ,  $A = 1$ ,  $B = 0.05$

*Параметри*

$$p = 1, 2, 3, 4, 5; \quad q = 1, 2, 3, 4, 5;$$

*Визначення завдання*

Завдання визначається трьома цифрами:  $i$ ,  $p$ ,  $q$ , де  $i$  - номер варіанту. Наприклад, завдання 2.1.5 означає варіант 2, параметри  $p = 1$ ,  $q = 5$ .

*Формули*

"предиктор" (локальна похибка  $O(h^4)$ )

$$y_{i+1} = y_i + h (23f_i - 16f_{i-1} + 5f_{i-2}) / 12; \quad z_{i+1} = z_i + h (23g_i - 16g_{i-1} + 5g_{i-2}) / 12;$$

"коректор" (локальна похибка  $O(h^5)$ )

$$y_{i+1} = y_i + h (9f_{i+1} + 19f_i - 5f_{i-1} + f_{i-2}) / 24; \quad z_{i+1} = z_i + h (9g_{i+1} + 19g_i - 5g_{i-1} + g_{i-2}) / 24;$$

*Приклад*

Багатокроковим методом Адамса 4-го порядку точності (схема "предиктор-коректор") на проміжку  $[1, 2]$  знайти розв'язок задачі Коші

$$\begin{cases} u' = \frac{v-u}{x}, v' = \frac{v+u}{x}, \\ u(1) = 1, \quad v(1) = 1 \end{cases}$$

Фрагмент обчислень прикладу в MS Excel

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	x	u_	v_	f_	g_	u	v	f	g	Метод	h
2	1,0					1,0000	1,0000	0,0000	2,0000	Рунге-Кутта	0,1
3	1,1					1,0091	1,2003	0,1738	2,0085		
4	1,2					1,0334	1,4021	0,3072	2,0296		
5	1,3	1,0691	1,6067	0,4135	2,0583	1,0696	1,6065	0,4130	2,0585		Адамс
6	1,4	1,1151	1,8141	0,4993	2,0923	1,1154	1,8140	0,4990	2,0924		

7	1,5	1,1688	2,0251	0,5709	2,1293	1,1690	2,0251	0,5707	2,1293		
---	-----	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--	--

Рекомендації щодо формул прикладу в MS Excel

Адреса	Формула	Автозаповнення
H2	=(G2-\$F2)/\$A2	вправо1+вниз; копіювання
B5	=F4+\$K\$2*(23*H4-16*H3+5*H2)/12	вправо1+вниз;
F5	=F4+\$K\$2*(9*D5+19*H4-5*H3+H2)/24	вправо1+вниз;

Фрагмент програми обчислень прикладу в Pascal



```

{$F+}
uses crt;
const n_max    = 100;
      n_system= 2;
      p_adams  = 4;
      epsilon  = 1.0E10-4;
      k_pred   : array [1..p_adams-1] of real = (5,-16, 23);
      k_corr   : array [1..p_adams] of real = (1, -5, 19, 9);
type s_vector = array [1..n_system] of real;
      s_matrix = array [1..n_system, 1..p_adams] of real;
      func     = function(i:integer; x:real; w:s_vector):real;
var a,b,h,x          : real;
      w,wp,ww        : s_vector;
      f_adams        : s_matrix;
      i,j            : integer;
      file_in,file_out : text;
function f(i:integer; x:real; w:s_vector):real;
begin
  case i of
    1: f:=(w[2]-w[1])/x;
    2: f:=(w[2]+w[1])/x
  end
end;
procedure adams4(x,h:real; f:func; var f_adams:s_matrix; var w:s_vector);
var
  wp      : s_vector;
  i,j     : integer;
  s       : real;
begin
  {predictor}
  for i:=1 to n_system do
  begin
    s:=0;
    for j:=1 to p_adams-1 do s:=s+k_pred[j]*f_adams[i,j];
    wp[i]:=w[i]+h*s/12;
  end;
  for i:=1 to n_system do f_adams[i,p_adams]:=f(i,x,wp);
  {corrector}
  for i:=1 to n_system do
  begin
    s:=0;
    for j:=1 to p_adams do s:=s+k_corr[j]*f_adams[i,j];
    w[i]:=w[i]+h*s/24;
  end;
  for i:=1 to n_system do f_adams[i,p_adams]:=f(i,x,w);
  for i:=1 to n_system do
  for j:=2 to p_adams do f_adams[i,j-1]:=f_adams[i,j];
  end;
procedure print_adams(x:real;w:s_vector);
var i:integer;
begin
  write(x:12:4);
  write(file_out,x:12:4);
  for i:=1 to n_system do
  begin
    write(w[i]:12:4);
    write(file_out,w[i]:12:4);
  end;
  writeln;
  writeln(file_out)
end;

```

```

BEGIN
  clrscr;
  assign(file_out, 'adamsout.dat');
  rewrite(file_out);
  assign(file_in, 'adams_in.dat');
  reset(file_in);
writelnl('x':8, 'y':12, 'z':12);
  writelnl(file_out, 'x':8, 'y':12, 'z':12);
  writelnl('-----');
  writelnl(file_out, '-----');
  readln(file_in, a, b, h);
  for j:=1 to p_adams-1 do
  begin
    x:=a+(j-1)*h;
    for i:=1 to n_system do read(file_in, w[i]);
    print_adams(x, w);
    for i:=1 to n_system do
    begin
      f_adams[i, j]:=f(i, x, w)
    end;
    readln(file_in)
  end;
  x:=a+h*(p_adams-2);
  while x<b do
  begin
    x:=x+h;
    adams4(x, h, f, f_adams, w);
    print_adams(x, w);
  end;
  close(file_in); close(file_out);
  readln;
END.

```

Практична робота №3 "Проекційні методи розв'язування крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь"

*Постановка задачі*

Застосовуючи метод Гальоркіна і метод колокації знайти розв'язок крайової задачі

$$\begin{cases} L(u) \equiv -(s(x)u'(x))' + r(x)u(x) = f(x), x \in (0,1) \\ u^{(t)}(0) = u^{(t)}(1) = 0 \end{cases}$$

для  $n=1, n=2$ . Порівняти отримані розв'язки між собою та точним розв'язком  $u^*(x)=x^2(1-x)^2$ .

*Варіанти*

- 1)  $s = p; \quad r = 1 + qx^2, \quad t = 0$
- 2)  $s = 1 + qx^2; \quad r = p, \quad t = 1$
- 3)  $s = p; \quad r = 1 + qx^2, \quad t = 1$
- 4)  $s = 1 + qx^2; \quad r = p, \quad t = 0$

Примітка: функція  $f(x)$  визначається коефіцієнтами задачі  $s(x)$ ,  $r(x)$  і точним розв'язком  $u^*(x)$  і обчислюється перед розв'язуванням задачі.

*Параметри*

$$\begin{aligned} p &= 1, 2, 3, 4, 5; \\ q &= 1, 2, 3, 4, 5; \end{aligned}$$

*Визначення завдання*

Завдання визначається трьома цифрами:  $i.p.q$ , де  $i$  - номер варіанту. Наприклад, завдання 2.1.5 означає варіант 2, параметри  $p = 1, q = 5$ .

*Формули*

Наближений розв'язок

$$y_n(x) = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(x),$$

де координатні функції  $\varphi_i(x)$  задовольняють однорідні крайові умови. Для цього на проміжку  $[0, 1]$  можна скористатись степеневими функціями вигляду  $\varphi_i(x)=x^{i1}(1-x)^{i2}$ .

Невідомі коефіцієнти знаходяться з СЛАР  $A\vec{c} = \vec{f}$ , де елементи  $a_{ij}$  матриці і  $f_i$  вектора вільних членів ( $i, j = 1, 2, \dots, n$ ) визначаються рівностями:

Метод Гальоркіна, перша і друга крайова задача з однорідними крайовими умовами:

$$a_{ij} = \int_a^b (s(x)\varphi_j'(x)\varphi_i'(x) + r(x)\varphi_j(x)\varphi_i(x))dx$$

$$f_i = \int_a^b f(x)\varphi_i(x)dx$$

Метод колокації, перша і друга крайова задача з однорідними крайовими умовами:

$$a_{ij} = L\varphi_j(x_i) \quad f_i = f(x_i), \text{ де } x_i - \text{ точки колокації з проміжку } [0,1]$$

### Приклад

Методом колокації знайти власні значення для диференціального рівняння

$$\frac{d}{dx}(u'(x)) + \lambda u(x) = 0, x \in [0,1]$$

з крайовими умовами  $u(0) = u(1) = 0$ .

Точний розв'язок: власні значення  $\lambda_i = -(i\pi)^2$ ,  $i = 1, 2, \dots$ . Відповідні ортонормовані власні функції  $u(x) = \sqrt{2} \sin(i\pi x)$ .

Розв'язування задачі методом колокації. Складаючи проєкції нев'язки  $R(x)$  на  $\delta$ -функції Дірака, отримаємо

$$\frac{d}{dx}(y'_n(x)) + \lambda y_n(x) = 0, x = x_i \in [0,1], i = 1, 2, \dots, n$$

де  $x_i$  – точки колокації. Для  $n = 1$  це рівняння запишеться так

$$-2c_1 + \tilde{\lambda}c_1(x_1 - x_1^2) = 0,$$

розв'язок якого  $\tilde{\lambda} = \frac{2}{x_1 - x_1^2}$ . І тепер виявляється, що фактична похибка залежить від способу

розміщення точок колокації. Наприклад, якщо взяти  $x_1 = 0.5$ , то  $\tilde{\lambda} = 8$  і похибка обчислення власного числа сягає майже до 20%. Якщо за точку колокації взяти  $x_1 = 0.25$  (або  $x_1 = 0.75$ ), то похибка зменшується до 11%!

Ортонормована власна функція  $y_1(x) = c_1(x - x^2)$ . Сталу  $c_1$  знаходимо з умов ортонормованості цієї функції  $(y_1(x), y_1(x)) = 1$ , або  $\int_0^1 (c_1(x - x^2))^2 dx = 1$ . Після простих

обчислень  $c_1 = \sqrt{30}$ ,  $y_1(x) = \sqrt{30}(x - x^2)$ . Фактична похибка наближеного власного значення  $\varepsilon = \frac{\pi^2 - 10}{\pi^2} 100\% \approx 1.3\%$ . Порівняння власних функцій (точної ( $u$ ) і наближеної ( $y$ ))

представлено на рис.1. Фактична похибка наближеного значення власної функції в окремих вузлах теж достатньо мала (крім точок, що знаходяться поблизу межі проміжка інтегрування задачі).

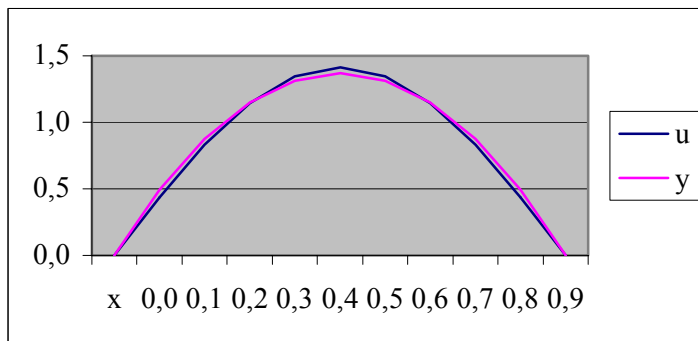


Рис.1.

Практична робота №4 "Варіаційні методи розв'язування крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь"

*Постановка задачі*

Застосовуючи метод Рітца і метод найменших квадратів знайти розв'язок крайової задачі

$$\begin{cases} L(u) \equiv -(s(x)u'(x))' + r(x)u(x) = f(x), x \in (0,1) \\ u^{(t)}(0) = u^{(t)}(1) = 0 \end{cases}$$

для  $n=1, n=2$ . Порівняти отримані розв'язки між собою та точним розв'язком  $u^*(x) = (x(1-x))^3$ .

*Варіанти*

- 1)  $s = p; \quad r = 1 + qx^2, \quad t = 0$
- 2)  $s = 1 + qx^2; \quad r = p, \quad t = 1$
- 3)  $s = p; \quad r = 1 + qx^2, \quad t = 1$
- 4)  $s = 1 + qx^2; \quad r = p, \quad t = 0$

Примітка:

функція  $f(x)$  визначається формулою:  $f(x) = L(u^*)$ .

Параметри

$$p = 1, 2, 3, 4, 5;$$

$$q = 1, 2, 3, 4, 5;$$

Визначення завдання

Завдання визначається трьома цифрами:  $i.p.q$ , де  $i$  - номер варіанту. Наприклад, завдання 2.1.5 означає варіант 2, параметри  $p = 1, q = 5$ .

Формули

Наближений розв'язок

$$y_n(x) = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(x),$$

де координатні функції  $\varphi_i(x)$  задовольняють однорідні крайові умови. Для цього на проміжку  $[0, 1]$  можна скористатись степеневими функціями вигляду  $\varphi_i(x) = x^{i_1}(1-x)^{i_2}$ , де  $i_1, i_2$  можна вибрати різними способами, наприклад, зафіксувати  $i_1 = 2$ , а значення  $i_2$  вибирати в залежності від  $i$ :  $i_2 = 1 + i$ . Невідомі коефіцієнти знаходяться з СЛАР

$$A\vec{c} = \vec{f},$$

де елементи  $a_{ij}$  матриці і  $f_i$  вектора вільних членів ( $i, j = 1, 2, \dots, n$ ) визначаються рівностями:

Метод Рітца, перша і друга крайова задача з однорідними крайовими умовами:

$$a_{ij} = \int_a^b (s(x)\varphi_j'(x)\varphi_i'(x) + r(x)\varphi_j(x)\varphi_i(x))dx; f_i = \int_a^b f(x)\varphi_i(x)dx$$

Метод найменших квадратів, перша і друга крайова задача з однорідними крайовими умовами:

$$a_{ij} = \int_a^b L\varphi_i(x)L\varphi_j(x)dx; f_i = \int_a^b L\varphi_i(x)f(x)dx$$

Практична робота №5 "Балістичний метод розв'язування крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь"

*Постановка задачі*

Застосовуючи балістичний метод знайти розв'язок крайової задачі

$$\begin{cases} -(s(x)u'(x))' + r(x)u(x) = f(x), x \in (0,1) \\ u^{(t)}(0) = u^{(t)}(1) = 0 \end{cases}$$

Порівняти отриманий розв'язок з точним розв'язком  $u^*(x) = (x(1-x))^3$ .

Вказівка: задачу Коші розв'язувати методом Ейлера з кроком  $h = 0.1$ .

*Варіанти*

- |                    |                 |         |                    |                 |         |
|--------------------|-----------------|---------|--------------------|-----------------|---------|
| 1) $s = p;$        | $r = 1 + qx^2,$ | $t = 0$ | 3) $s = p;$        | $r = 1 + qx^2,$ | $t = 1$ |
| 2) $s = 1 + qx^2;$ | $r = p,$        | $t = 1$ | 4) $s = 1 + qx^2;$ | $r = p,$        | $t = 0$ |

Примітка:

функція  $f(x)$  визначається формулою:  $f(x) = L(u^*)$ .

*Параметри*

$$\begin{aligned} p &= 1, 2, 3, 4, 5; \\ q &= 1, 2, 3, 4, 5; \end{aligned}$$

*Визначення завдання*

Завдання визначається трьома цифрами:  $i.p.q$ , де  $i$  - номер варіанту. Наприклад, завдання 2.1.5 означає варіант 2, параметри  $p = 1, q = 5$ .

*Приклад*

*Застосовуючи балістичний метод знайти розв'язок крайової задачі*

$$\begin{cases} u''(x) + xu'(x) - u(x) = x^2 + 2, x \in (0,1) \\ u'(0) + u(0) = 0 \\ u'(1) - u(1) = 1 \end{cases}$$

Порівняти отриманий розв'язок з точним розв'язком  $u^*(x) = x^2$ .

Вказівка: задачу Коші розв'язувати методом Ейлера з кроком  $h = 0.1$ .

Перш за все запишемо задачу для диференціального рівняння другого порядку через еквівалентну задачу для системи диференціальних рівнянь першого порядку

$$\begin{cases} u'(x) = v(x), x \in (0,1) \\ v'(x) = u(x) - xv(x) + x^2 + 2, x \in (0,1) \\ v(0) + u(0) = 0 \\ v(1) - u(1) = 1 \end{cases}$$

Крайова задача - лінійна, тому її розв'язок представимо у вигляді суперпозиції загального розв'язку однорідної задачі та часткового розв'язку неоднорідної задачі

$$(u, v) = c(u_0, v_0) + (u_1, v_1)$$

де коефіцієнт  $c$  знайдемо використовуючи другу крайову умову.

Розв'язування однорідної задачі

$$\begin{cases} u'(x) = v(x), x \in (0,1) \\ v'(x) = u(x) - xv(x), x \in (0,1) \\ v(0) + u(0) = 0 \\ v(1) - u(1) = 0 \end{cases}$$

балістичним методом здійснюється так (індекс "0" в позначенні опускаємо для спрощення записів). Вибираємо значення -1 параметру пристрілки для  $u(0)$ . Тоді з однорідної крайової задачі маємо задачу Коші

$$\begin{cases} u'(x) = v(x), x \in (0,1) \\ v'(x) = u(x) - xv(x), x \in (0,1) \\ u(0) = -1 \\ v(0) = 1 \end{cases}$$

яку розв'язуємо методом Ейлера з заданим кроком 0.1.

Розв'язування часткової неоднорідної задачі

$$\begin{cases} u'(x) = v(x), x \in (0,1) \\ v'(x) = u(x) - xv(x) + x^2 + 2, x \in (0,1) \\ v(0) + u(0) = 0 \\ v(1) - u(1) = 1 \end{cases}$$

балістичним методом здійснюється аналогічно (індекс "1" в позначенні опускаємо для спрощення записів). Вибираємо значення 0 параметру пристрілки для  $u(0)$ . Тоді з неоднорідної крайової задачі маємо задачу Коші

$$\begin{cases} u'(x) = v(x), x \in (0,1) \\ v'(x) = u(x) - xv(x) + x^2 + 2, x \in (0,1) \\ u(0) = 0 \\ v(0) = 0 \end{cases}$$

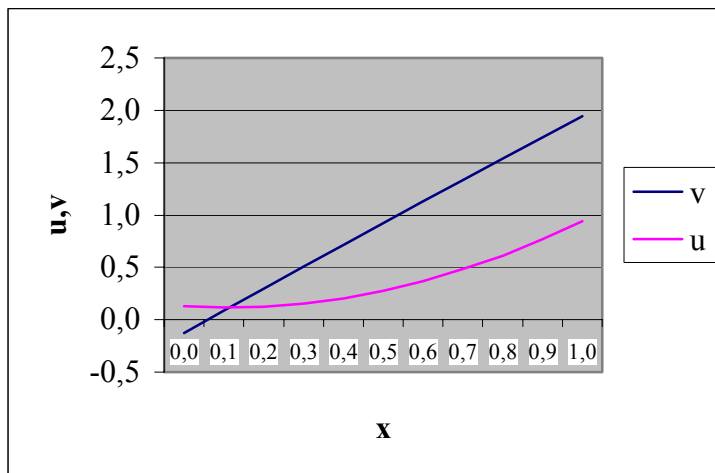
Підставляючи розв'язок  $(u, v) = c(u_0, v_0) + (u_1, v_1)$  в другу крайову умову, знайдемо вираз для константи

$$c = \frac{1 - (u_1(1) - v_1(1))}{u_0(1) - v_0(1)}.$$

Нижче наведені результати розрахунків в оболонці MS Excel. Порівняння з точним розв'язком привели до прогнозованих похибок в 10% - у відповідності з порядком точності методу Ейлера.



x	v0	u0	g0	f0	v1	u1	g1	f1	
0,00	1,0000	-1,0000	-1,0000	1,0000	0,0000	0,0000	2,0000	0,0000	-0,1
0,10	0,9000	-0,9000	-0,9900	0,9000	0,2000	0,0000	1,9900	0,2000	0,0
0,20	0,8010	-0,8100	-0,9702	0,8010	0,3990	0,0200	1,9802	0,3990	0,2
0,30	0,7040	-0,7299	-0,9411	0,7040	0,5970	0,0599	1,9708	0,5970	0,5
0,40	0,6099	-0,6595	-0,9035	0,6099	0,7941	0,1196	1,9620	0,7941	0,7
0,50	0,5195	-0,5985	-0,8583	0,5195	0,9903	0,1990	1,9539	0,9903	0,9
0,60	0,4337	-0,5466	-0,8068	0,4337	1,1857	0,2980	1,9466	1,1857	1,1
0,70	0,3530	-0,5032	-0,7503	0,3530	1,3803	0,4166	1,9404	1,3803	1,3
0,80	0,2780	-0,4679	-0,6903	0,2780	1,5744	0,5546	1,9351	1,5744	1,5
0,90	0,2090	-0,4401	-0,6282	0,2090	1,7679	0,7121	1,9310	1,7679	1,7
1,00	0,1461	-0,4192	-0,5653	0,1461	1,9610	0,8889	1,9279	1,9610	1,9
-0,12757	=c								$L_2$
									C



Практична робота №6 "Метод скінчених різниць розв'язування крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь"

*Постановка задачі*

Застосовуючи метод скінчених різниць виконати завдання 1-5 для самостійної роботи над темою 5 „Чисельні методи розв'язування крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь” [Лабораторні роботи та домашні завдання для самостійної роботи з дисципліни "Методи обчислень", Упорядники: В.В.Попов, Б.П.Довгий, Є.С.Вакал. – К.:2006. –34с.].

*Приклад 1*

Методом скінчених різниць знайти розв'язок крайової задачі з порядком апроксимації  $O(h^2)$

$$\begin{cases} u''(x) + xu'(x) - u(x) = x^2 + 2, x \in (0,1) \\ u'(0) + u(0) = 0 \\ u'(1) - u(1) = 1 \end{cases}$$

Порівняти отриманий розв'язок з точним  $u^*(x) = x^2$ .

Вказівка: побудувати різницеву схему з використанням „фіктивної точки” ( для крайової умови при  $x=0$  ) і уточненням нев'язки ( для крайової умови при  $x=1$  ); задачу розв'язувати з кроком  $h = 0.5$  .

*Приклад 2*

Методом скінчених різниць знайти розв'язок крайової задачі з порядком апроксимації  $O(h^2)$

$$\begin{cases} (p(x)u'(x))' - u(x) = f(x), x \in (0,1) \\ u(0) = 0 \\ u(1) = 1 \end{cases},$$

$$\text{де } p(x) = \begin{cases} x+1, x \in (0,0.25), \\ x^2, x \in (0.25,1) \end{cases}, f(x) = \begin{cases} 1-x, x \in (0,0.25), \\ 1-\ln x, x \in (0.25,1) \end{cases}.$$

Порівняти отриманий розв'язок з точним  $u^*(x) = \begin{cases} x, x \in (0,0.25), \\ \ln x, x \in (0.25,1) \end{cases}$ .

Вказівка: побудувати різницеву схему з використанням методу балансу; задачу розв'язувати з кроком  $h = 0.25$  .

Практична робота №7 "Метод скінчених різниць розв'язування крайових задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку"

*Постановка задачі*

Застосовуючи метод скінчених різниць побудувати різницеві схеми (РС) першого порядку апроксимації для рівняння переносу

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = f(x, t), c = \text{const} > 0 \quad (1)$$

з початковими та крайовими умовами в області визначення функції  $u(x)$  (рис.1)

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \mu_1(x), x \in [0, 1] \\ u(0, t) &= \mu_2(t), t \in [0, T] \end{aligned} \quad (2)$$

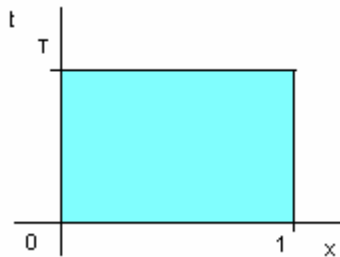


Рис.1. Область визначення функції  $u(x)$

Дослідити стійкість РС за початковими даними та правими частинами, використовуючи принцип максимуму для двошарових РС. Шаплони РС вибрати для кожного з можливих варіантів сукупності вузлів (рис.2),

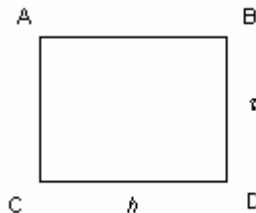


Рис.2. Сукупність вузлів для шаблонів ( $h, \tau$  – кроки сітки в напрямках  $Ox$  і  $Ot$ )

а саме, чотири варіанти C-D-B, C-A-B, A-B-D, C-A-B-D (для РС з симетризованими похідними).

*Теоретичні відомості*

Принцип максимуму встановлює стійкість в нормі  $\| \cdot \|_{hC}$  для двошарових РС, що мають вигляд

$$\sum_k \alpha_k \mathcal{F}_{i+k} = \sum_l \beta_l \mathcal{Y}_{i+l} + \varphi_i$$

де  $|\alpha_0| = \max_k |\alpha_k|$ . Тоді:

- 1) РС рівномірно стійка за початковими даними при умові

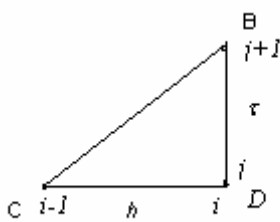
$$(1 + C\tau)|\alpha_0| \geq \sum_{k \neq 0} |\alpha_k| + \sum_l |\beta_l|, C = \text{const}$$

- 2) РС стійка за правою частиною, якщо виконується умова 1) і

$$|\alpha_0| - \sum_{k \neq 0} |\alpha_k| \geq \frac{\kappa}{\tau}, \kappa = \text{const} > 0$$

**Приклад**

Розглянемо варіант шаблону С-D-B



Рівняння переносу (1) в дискретній формі приймає вигляд:

$$\frac{1}{\tau}(\mathcal{F}_i - y_i) + \frac{c}{h}(y_i - y_{i-1}) = \varphi_i \quad (3)$$

Початкові та крайові умови (2) мають свій точний дискретний аналог. Тому дослідження РС еквівалентно дослідженню різницевого рівняння (3), що передбачає дослідження:

- існування єдиного розв'язку РС;
- апроксимації РС;
- рівномірної стійкості РС за початковими даними;
- стійкості РС за правою частиною;
- збіжності РС.

Дослідження існування єдиного розв'язку РС.

Очевидно, знаходження шуканого значення  $\mathcal{F}_i$  з рівняння (3) здійснюється за простою алгебраїчною формулою, що не містить невизначеності. Тому в даному випадку РС – явна і має єдиний розв'язок.

Дослідження апроксимації РС.

Складаємо вираз для нев'язки  $\psi_h$  на розв'язку  $u(x)$ :

$$\psi_h = L_h u - \varphi_h = (L_h u - \varphi_h) - (Lu - f)_h$$

Нехай  $\varphi_h$  обчислюється функцією  $f(x,t)$  в середині прямокутника SABD. Розвинення в ряд Тейлора нев'язки  $\psi_h$  в околі вузла B дає наступний вираз для головного члена ряду

$$\psi_h = \frac{\tau}{2}(f_t - u_{tt}) + \frac{h}{2}(cu_{xx} - f_x),$$

тобто  $\psi_h = O(\tau+h)$ . Таким чином, РС при неперервних перших похідних функції  $f(x,t)$  і двічі неперервно диференційовному розв'язку  $u(x)$  має апроксимацію першого порядку.

Дослідження рівномірної стійкості РС за початковими даними.

Використовуємо принцип максимуму, за яким при дослідженні рівномірної стійкості РС за початковими даними необхідно зафіксувати збурення правої частини, тобто покладемо її значення нулю. Критерій стійкості з константою  $C = 0$  приймає вигляд

$$\frac{1}{\tau} \geq \frac{c}{h} + \left| \frac{1}{\tau} - \frac{c}{h} \right|,$$

що виконується при

$$c\tau \leq h$$

- умова Куранта. Таким чином, РС – умовно стійка.

Дослідження стійкості РС за правою частиною.

Використовуємо принцип максимуму, за яким при дослідженні рівномірної стійкості РС за правою частиною необхідно зафіксувати збурення початкових даних. Безпосередньо видно, що додаткова умова стійкості за правою частиною справджується, причому  $\kappa = 1$ .

Дослідження збіжності РС.

На основі теореми про апроксимацію, стійкість і збіжність встановлюємо, що дана РС збіжна з першим порядком.

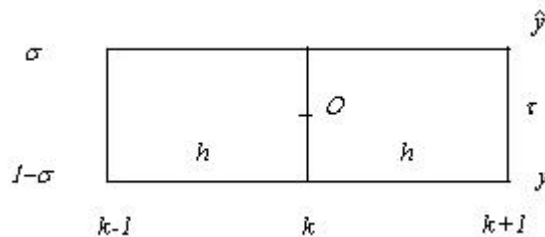
Практична робота №8 "Метод скінчених різниць розв'язування крайових задач для  
одновимірного рівняння теплопровідності "

*Постановка задачі*

Застосовуючи метод скінчених різниць для першої крайової задачі рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), \quad a = k^2 = \text{const} > 0 \quad (1)$$

з використанням 6-точкового шаблону з ваговими коефіцієнтами



- 1) побудувати різницеві схеми (РС) :
  - явну порядку  $O(\tau + h^2)$ ;
  - неявну порядку  $O(\tau + h^2)$ ;
  - Кранка-Ніколсона;
  - підвищеного порядку.
- 2) Дослідити стійкість всіх РС за початковими даними та правими частинами, використовуючи принцип максимуму для двошарових РС та метод розділення змінних. Результати звести в таблицю дослідження стійкості і порівняти між собою.
- 3) Виконати завдання 5-8 для самостійної роботи над темою №6 „Різницеві схеми для рівнянь теплопровідності”.

*Теоретичні відомості*

Принцип максимуму (див. Практичну роботу №7).

Метод розділення змінних.

Метод розділення змінних встановлює стійкість в нормі  $\|\cdot\|_{L_2}$  та використовується при дослідженні стійкості не тільки лінійних, але і нелінійних РС. Цей метод можна використовувати при певних умовах і при несталіх коефіцієнтах диференціального рівняння (метод заморожування коефіцієнтів). Згідно з методом розділення змінних розв'язок для похибки відшукується у вигляді з розділеними змінними. Звідси назва методу, а також і інша його назва – *метод Фур'є*. Таким чином,

$$\delta y(x_k, t_j) = \rho_q^j \exp(iq x_k) \quad (2)$$

де  $q$  – індекс гармонік методу Фур'є,  $q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ;  $i$  – уявна одиниця. Тут  $\rho_q$  - множник зростання ( $q$ )–тої гармоніки при переході з шару на шар. При дослідженні стійкості РС за початковими даними праву частину приймають рівною нулю і після підстановки (2) в РС отримують вираз щодо множника  $\rho_q$ . Ознака стійкості за початковими даними формулюється так:

*РС стійка за початковими даними, якщо для всіх  $q$  виконується нерівність*

$$|\rho_q| \leq 1 + C\tau, \quad C = \text{const} \quad (3)$$

Методом розділення змінних для лінійних РС можна встановлювати також їх стійкість за правою частиною. При цьому "працює" ознака 2) принципу максимуму.

Практичне використання методу розділення змінних для двошарових РС полягає в здійсненні таких кроків

1. Представлення розв'язку на поточному шарі через  $y_k = \exp(iqx_k)$ .
2. Представлення розв'язку на наступному шарі через  $\mathfrak{F}_k = \rho_q \exp(iqx_k)$ .
3. Підстановка виразів для розв'язків в РС з нульовою правою частиною.
4. Отримання виразу для множника  $\rho_q$  зростання  $q$ -ї гармоніки.
5. Підстановка виразу для множника  $\rho_q$  в необхідну умову стійкості (8).
6. Розв'язування отриманої нерівності відносно вільних параметрів (кроків сітки за змінними).

*Приклад*

Дослідження рівномірної стійкості явної РС за початковими даними методом розділення змінних.

Розглянемо явну РС

$$\frac{1}{\tau}(\mathfrak{F}_k - y_k) - \frac{a}{h^2}(y_{k-1} - 2y_k + y_{k+1}) = \varphi_k, \quad k = 1, 2, \dots, n-1 \quad (4)$$

Представляємо розв'язок на поточному шарі через  $y_k = \exp(iqx_k)$ , а на наступному шарі через  $\mathfrak{F}_k = \rho_q \exp(iqx_k)$ . Підставляючи ці вирази в (4) з обнуленою правою частиною, отримаємо

$$\frac{1}{\tau}(\rho_q - 1)\exp(iqx_k) - \frac{a}{h^2}(\exp(iq(x_k - h)) - 2\exp(iqx_k) + \exp(iq(x_k + h))) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n-1,$$

або, після скорочення на  $\exp(iqx_k)$

$$\frac{1}{\tau}(\rho_q - 1) - \frac{a}{h^2}(2\cos(qh) - 2) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n-1$$

Скориставшись формулами половинного аргументу

$$\rho_q = 1 - \frac{4a\tau}{h^2} \sin^2 \frac{qh}{2}. \quad (5)$$

Для посилення стійкості РС вибираємо в (3)  $C = 0$ , що приведе до необхідних умов стійкості

$$|\rho_q| \leq 1. \quad (6)$$

З формули (5) видно, що множник  $\rho_q$  зростання гармонік менше за одиницю. Залишається перевірити нерівність  $\rho_q \geq -1$ . В результаті з врахуванням (5) дістанемо умову

$\frac{2a\tau}{h^2} \sin^2 \frac{qh}{2} \leq 1$ , що виконується при більш жорсткій умові  $\frac{2a\tau}{h^2} \leq 1$ , звідки отримаємо остаточно умову вибору кроку за часом

$$\tau \leq \frac{h^2}{2a} \quad (7)$$

Таким чином, явна РС для рівняння теплопровідності умовно стійка в  $\|\cdot\|_{L_2}$ .

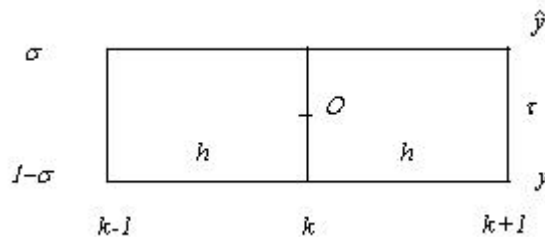
Практична робота №9 "Метод скінчених різниць розв'язування крайових задач для  
одновимірного рівняння теплопровідності" (Частина II)

*Постановка задачі*

1. Застосовуючи метод скінчених різниць для другої крайової задачі рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), \quad a = k^2 = \text{const} > 0 \quad (1)$$

з використанням 6-точкового шаблону з ваговими коефіцієнтами



побудувати дискретні аналоги крайової умови порядку  $O(\tau + h^2)$ :

- методом фіктивної точки;
- методом підвищення апроксимації.

2. Розглянути просторову задачу теплопровідності в циліндричних координатах  $(r, \varphi, z)$  для диска, коли розв'язок залежить від часу  $t$  та однієї просторової координати  $r$ , тобто має місце осьова симетрія. Побудувати різницеву схему для задачі теплопровідності

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + f(x, t), \quad r \in (0, 1), t \in (0, T), \quad (2)$$

$$u(r, 0) = g(r), \quad r \in [0, 1], \quad (3)$$

$$r \frac{\partial u(r, t)}{\partial r} = 0, \quad r = 0, \quad t \in [0, T], \quad (4)$$

$$a(t)u(r, t) + b(t) \frac{\partial u(r, t)}{\partial r} = g(t), \quad r = 1, \quad t \in [0, T], \quad (5)$$

де (2) – рівняння теплопровідності, (3) – початкова умова, (4) – умова обмеженості розв'язку, (5) – крайова умова III роду.

3. Розглянути просторову задачу теплопровідності в сферичних координатах  $(r, \theta, \varphi)$  для кулі, коли розв'язок залежить від часу  $t$  та однієї просторової координати  $r$ , тобто має місце центральна симетрія. Побудувати різницеву схему для задачі теплопровідності

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + f(x, t), \quad r \in (0, 1), t \in (0, T), \quad (6)$$

$$u(r, 0) = g(r), \quad r \in [0, 1], \quad (7)$$

$$r^2 \frac{\partial u(r, t)}{\partial r} = 0, \quad r = 0, \quad t \in [0, T], \quad (8)$$

$$a(t)u(r, t) + b(t) \frac{\partial u(r, t)}{\partial r} = g(t), \quad r = 1, \quad t \in [0, T], \quad (9)$$

де (6) – рівняння теплопровідності, (7) – початкова умова, (8) – умова обмеженості розв'язку, (9) – крайова умова III роду.

*Перевірка домашнього завдання практичної роботи №8*

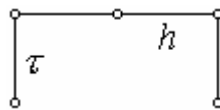
1. Дослідити апроксимацію тришарової різницевої схеми Річардсона:

$$\frac{1}{2\tau}(\hat{y}_i - \check{y}_i) = \frac{1}{h^2}(y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}) + f_i$$

2. Дослідити апроксимацію тришарової різницевої схеми Дюфорта-Франкела:

$$\frac{1}{2\tau}(\hat{y}_i - \check{y}_i) = \frac{1}{h^2}(y_{i-1} - \hat{y}_i - \check{y}_i + y_{i+1}) + f_i$$

3. Дослідити стійкість тришарової різницевої схеми Дюфорта-Франкела методом відокремлення змінних.  
4. Для рівняння (1) побудувати дискретний аналог на шаблоні



і довести що відповідна різницева схема стійка при

$$2\tau > h^2.$$



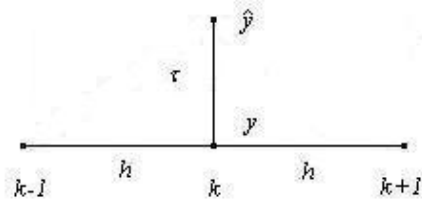
Практична робота №10 "Поняття стійкості та апроксимації при використанні методу скінчених різниць"

*Постановка задачі*

4. Дано різницеве рівняння

$$\frac{1}{\tau}(\hat{y}_k - y_k) + \frac{1}{2h}(y_{k+1} - y_{k-1}) - \frac{1}{\tau}(y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}) = 0 \quad (1)$$

що записане на шаблоні



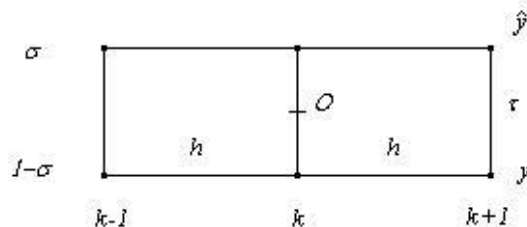
З'ясувати, яке диференціальне рівняння апроксимує (1) при таких співвідношеннях кроків

- $\tau = h$ ;
- $\tau = h^2$ .

5. Дослідити на стійкість різницеве рівняння

$$\frac{\sigma}{h}(y_{k+1} - y_k) + \frac{1-\sigma}{h}(y_k - y_{k-1}) = Cy_k, \quad \sigma \in [0,1]$$

6. Ознайомитись з поняттям асимптотичної стійкості неявних РС з ваговими коефіцієнтами на 6-точковому шаблоні



для рівняння  $u_t = u_{xx}$ . Знайти умови асимптотичної стійкості.

Вказівки. Скористатись розв'язком  $u = \sum_{q=1}^{\infty} a_q \exp(-\pi^2 q^2 t) \sin(\pi q x)$ , де  $a_q$  – коефіцієнти

Фур'є початкових даних  $u(x,0)$ , провести аналіз процесу затухання гармонік цього розв'язку, порівняти множники зростання гармонік точного розв'язку і розв'язку РС (див. Калиткин Н.Н. Численные методы, с.374).

7. На 4-точковому шаблоні методом відокремлення змінних дослідити стійкість різницевої схеми крайової задачі для рівняння переносу

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = f(x,t), \quad c = \text{const} > 0$$

Практична робота №11 "Різницеві схеми для рівнянь еліптичного типу "

*Постановка задачі*

Дано двовимірне еліптичне рівняння в прямокутній області  $D = [[0 < x_1 < 1] \times [0 < x_2 < 1]]$ , а саме, рівняння Пуассона:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = -f(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in D \quad (1)$$

з крайовою умовою Діріхле на межі  $\partial D$

$$u(x_1, x_2) = g(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in \partial D \quad (2)$$

Використовуючи поперемінно-трикутну схему методу скінчених різниць побудувати алгоритм чисельного розв'язування крайової задачі (1)-(2).

*Теоретичні відомості*

Поперемінно-трикутна схема – одна з РС *обчислень на установлення*: розв'язок крайової задачі (1)-(2) отримується як границя двовимірної задачі параболічного типу при  $t \rightarrow \infty$  в прямокутній області  $D^* = [[0 < x_1 < 1] \times [0 < x_2 < 1] \times [t \geq 0]]$

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} = f(x_1, x_2), \quad (3)$$

$$v(x_1, x_2, t) = g(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in \partial D \cup t \geq 0, \quad (4)$$

$$v(x_1, x_2, 0) = \mu(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in \partial D, \quad (5)$$

де функція  $\mu(x_1, x_2)$  - довільна. Відмітемо, що крайова умова (4) від змінної часу не залежить. Для отримання різницевого аналога такого способу отримання шуканого розв'язку використовуються 5-точкові шаблони (Рис.1).

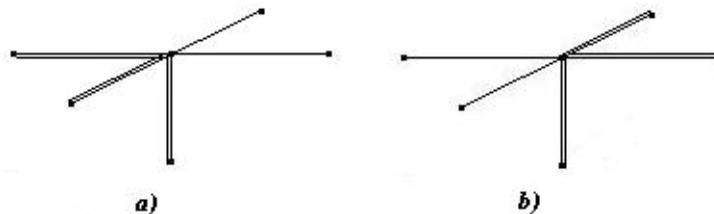


Рис. 1. Шаблони для поперемінно-трикутної схеми

Чисто неявна РС має вигляд

$$\frac{(\mathfrak{E}_{k,l} - y_{k,l})}{\tau} - (\Lambda_1 + \Lambda_2)\mathfrak{E}_{k,l} = \varphi_{k,l}, \quad k = 1, 2, \dots, n_1 - 1; \quad l = 1, 2, \dots, n_2 - 1; \quad (6)$$

де позначено

$$\Lambda_1 y_{k,l} = \frac{1}{h_1^2} (y_{k-1,l} - 2y_{k,l} + y_{k+1,l}), \quad \Lambda_2 y_{k,l} = \frac{1}{h_2^2} (y_{k,l-1} - 2y_{k,l} + y_{k,l+1}).$$

Ця схема некономічна (див. лекцію "Багатовимірні рівняння теплопровідності", аналіз порядку кількості обчислень явних і неявних РС). Для надання РС (6) більшої зручності проводяться такі її перетворення. Запишемо (6) в канонічній формі

$$(E - \tau\Lambda_1 - \tau\Lambda_2) \frac{(\mathfrak{E}_{k,l} - y_{k,l})}{\tau} - (\Lambda_1 + \Lambda_2)y_{k,l} = \varphi_{k,l} \quad (7)$$

З введенням операторів

$$\begin{aligned}
 R^+ y_{k,l} &= \frac{1}{h_1} (y_{k,l} - y_{k-1,l}) + \frac{1}{h_2} (y_{k,l} - y_{k,l-1}), \\
 R^- y_{k,l} &= \frac{1}{h_1} (y_{k,l} - y_{k+1,l}) + \frac{1}{h_2} (y_{k,l} - y_{k,l+1}),
 \end{aligned}
 \tag{8}$$

що визначені на шаблонах Рис.1 а) і Рис.1 б) відповідно, РС (7) запишеться так

$$(E + \tau R^+ + \tau R^-) \frac{(\mathfrak{F}_{k,l} - y_{k,l})}{\tau} - (\Lambda_1 + \Lambda_2) y_{k,l} = \varphi_{k,l},$$

або після факторизації з точністю  $O(\tau^2)$

$$(E + \tau R^+)(E - \tau R^-) \frac{(\mathfrak{F}_{k,l} - y_{k,l})}{\tau} - (\Lambda_1 + \Lambda_2) y_{k,l} = \varphi_{k,l} \tag{9}$$

- *поперемінно-трикутна РС.*

Поперемінно-трикутна РС на кожному шарі за часом реалізується в "додатньому" та "від'ємному" напрямках відносно осі  $x_l$ . Тут варто нагадати, що на крайові умови для шуканої функції не змінюються за часом. Тому розв'язок  $y$ , а разом з ним і функція

$z = (E - \tau R^-) \frac{(\mathfrak{F}_{k,l} - y_{k,l})}{\tau}$  на кожному новому шарі за часом на межі  $\partial\mathcal{D}$  успадковують крайові

значення з попереднього шару. Спочатку обертається оператор  $E + \tau R^+$ , рухаючись по напрямкам  $x_l$  і обчислюючи значення шуканої функції  $z$  у всіх вузлах сітки шару. Потім обертається оператор  $E + \tau R^-$ , рухаючись в напрямленні зворотньому до напрямків  $x_l$  і обчислюючи значення шуканої функції  $y$  у всіх вузлах сітки шару.

Практична робота №12 "Факторизовані різницеві схеми для багатовимірних рівнянь гіперболічного типу "

*Постановка задачі*

Дано  $p$ -вимірне гіперболічне рівняння в прямокутній області  $D \cup t \geq 0$ ,  
 $D = [[0 < x_1 < 1] \times [0 < x_2 < 1] \times \dots \times [0 < x_p < 1]]$ , а саме,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^p \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = f(\vec{x}, t), \quad \vec{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_p\} \in D \quad (1)$$

з початковими умовами і крайовими умовами першого роду

$$\begin{aligned} u(\vec{x}, 0) &= v_0(\vec{x}), \quad u_t(\vec{x}, 0) = v_1(\vec{x}), \quad \vec{x} \in D; \\ u(\vec{x}, t) &= g(\vec{x}, t), \quad \vec{x} \in \partial D. \end{aligned} \quad (2)$$

Використовуючи

- a) різницеву схему "хрест",
- b) тришарову різницеву схему з ваговими коефіцієнтами,
- c) факторизовану різницеву схему з ваговими коефіцієнтами

побудувати алгоритм чисельного розв'язування крайової задачі (1)-(2) та методом відокремлення змінних дослідити РС на стійкість.

*Теоретичні відомості*

Явна різницева схема "хрест" для рівняння (1) має вигляд

$$\frac{1}{\tau^2} (\mathfrak{F} - 2y + \check{y}) - \sum_{i=1}^p \Lambda_i y = \varphi_h. \quad (3)$$

Неявна різницева схема з ваговими коефіцієнтами для багатовимірного рівняння (1) має такий аналог одновимірного випадку

$$\frac{1}{\tau^2} (\mathfrak{F} - 2y + \check{y}) - \sum_{i=1}^p \Lambda_i [\sigma \mathfrak{F} + (1 - 2\sigma)y + \sigma \check{y}] = \varphi_h, \quad (4)$$

де  $\sigma \in [0, 1/2]$ .

Факторизована РС з ваговими коефіцієнтами будується на базі РС (4), яка для подальшого надання їй більшої зручності перетворюється в таку форму запису

$$\left( E - \tau^2 \sigma \sum_{i=1}^p \Lambda_i \right) \mathfrak{F} = \left[ 2E + \tau^2 (1 - 2\sigma) \sum_{i=1}^p \Lambda_i \right] y - \left( E - \tau^2 \sigma \sum_{i=1}^p \Lambda_i \right) \check{y} + \tau^2 \varphi_h, \quad (5)$$

де  $E$  - одиничний оператор. Оператору  $A = \left( E - \tau^2 \sigma \sum_{i=1}^p \Lambda_i \right)$  відповідає стрічкова матриця,

тому вихідна РС (4) неекономічна. Але оператор  $A$  вдається наближено з точністю  $O(\tau^4)$  замінити факторизованим оператором  $B$ :

$$B = \prod_{i=1}^p (E - \tau^2 \sigma \Lambda_i)$$

- добуток одновимірних операторів. Таким чином отримують факторизовану РС з ваговими коефіцієнтами

$$B\mathfrak{E} = \left[ 2E + \tau^2 (1 - 2\sigma) \sum_{i=1}^p \Lambda_i \right] y - \left( E - \tau^2 \sigma \sum_{i=1}^p \Lambda_i \right) \check{y} + \tau^2 \varphi_h \quad (6)$$

Оператор  $B$  зручний для обернення, процес якого – послідовний по всім множникам оператора, що відповідають напрямкам  $p$ -вимірного простору. На кожному такому кроці обернення застосовується метод прогонки розв'язування тридіагональних систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

При дослідженні стійкості багатовимірних РС використовується метод відокремлення змінних, в основі якого є багатовимірні гармоніки

$$y = \exp\left(i \sum_{j=1}^p q_j x_j\right). \quad (7)$$

З врахуванням (7) дискретний аналог другої похідної має вигляд

$$\Lambda_j y = -\frac{4}{h_j^2} \sin^2 \frac{q_j h_j}{2} \exp\left(i \sum_{j=1}^p q_j x_j\right). \quad (8)$$

Методом відокремлення змінних різницеві схеми (3), (4), (6) з використанням співвідршень (7), (8) перетворюються у відповідні квадратні рівняння відносно  $\rho$  - множника зростання гармонік в представленні розв'язків  $\mathfrak{E} = \rho y$ ,  $\check{y} = \frac{y}{\rho}$ .

Практична робота №13 "Чисельне розв'язування інтегральних рівнянь"

*Постановка задачі*

1. Дано інтегральне рівняння Фредгольма II роду

$$u(x) - \int_0^{\infty} e^{-(x+\xi)} u(\xi) d\xi = x, \quad x \in [0, \infty). \quad (1)$$

Отримати наближений розв'язок рівняння (1) методами:

- квадратур (квадратурна формула трапецій, кількість ділянок розбиття проміжку інтегрування  $n = 2$ );
- послідовних наближень (кількість ітерацій  $n = 2$ );

2. Дано інтегральне рівняння Фредгольма II роду

$$u(x) - \int_0^{0.5} \sin(x\xi) u(\xi) d\xi = 1 + \frac{1}{x} \left( \cos \frac{x}{2} - 1 \right), \quad x \in [0, 0.5]. \quad (2)$$

Отримати наближений розв'язок рівняння (2) методами:

- колокації (кількість ділянок розбиття проміжку інтегрування  $n = 2$ );
- заміни ядра виродженим (кількість членів ряду  $n = 2$ );

3. Дано інтегральне рівняння Фредгольма II роду

$$u(x) - \lambda \int_0^{\infty} e^{-(x+\xi)} u(\xi) d\xi = x, \quad x \in [0, \infty). \quad (3)$$

Знайти всі власні значення ядра рівняння (3).

4. Дано інтегральне рівняння Вольтерра II роду

$$u(x) + \int_0^x (x + \xi) u(\xi) d\xi = \sin x - 2 \cos x, \quad x \in [0, 1] \quad (4)$$

Отримати наближений розв'язок рівняння (4) методом апроксимації шуканої функції лінійним сплайном (кількість ділянок розбиття проміжку інтегрування  $n = 2$ ).

*Теоретичні відомості*

Нехай дано інтегральне рівняння Фредгольма II роду

$$u(x) + \int_a^b K(x, \xi) u(\xi) d\xi = f(x), \quad x \in [a, b] \quad (5)$$

*Метод квадратур* зводить розв'язування (5) до розв'язування СЛАР з елементами  $a_{ij}$  матриці  $A$

$$a_{ij} = \delta_{ij} + A_j K(x_i, x_j)$$

де  $\delta_{ij}$  - символ Кронекера,  $A_i, x_i$  - коефіцієнти та вузли квадратурної формули. Координати вектора вільних членів СЛАР є значення функції  $f(x)$ , що обчислені в вузлах квадратурної формули. Отриманий розв'язок СЛАР є наближеним чисельним розв'язком рівняння (5) в точках  $x = x_i, i = 0, 1, 2, \dots, n$ .

*Метод колокації* зводить розв'язування (5) до розв'язування СЛАР з елементами  $a_{ij}$  матриці  $A$

$$a_{ij} = \delta_{ij} + \int_{x_{j-1}}^{x_j} K(\bar{x}_i, \xi) d\xi, \quad (6)$$

де  $x_i$  – вузли розбиття проміжку інтегрування ( $i = 0, 1, \dots, n$ ). Координати вектора вільних членів СЛАР є значення функції  $f(x)$ , що обчислені в точках колокації. Як правило, в якості точок  $\bar{x}_i$  колокації вибирається середини ділянок  $\Delta_i = [x_{i-1}, x_i]$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  розбиття.

Інтеграл  $\int_{x_{j-1}}^{x_j} K(\bar{x}_i, \xi) d\xi$  в методі колокації можна обчислювати за найпростішими квадратурними формулами. В разі використання формул середніх прямокутників і вибору точок колокації в середині ділянок  $\Delta_j$  співвідношення (6) для елементів  $a_{ij}$  матриці  $A$  набуває простого вигляду

$$a_{ij} = \delta_{ij} + K(\bar{x}_i, \bar{x}_j) h_j$$

Отриманий розв'язок СЛАР є наближеним чисельним розв'язком рівняння (5) в точках  $x = \bar{x}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

В методі апроксимації шуканої функції лінійним сплайном шукана функція  $u(x)$  апроксимується сплайн-функцією  $y(x)$  першого порядку :

$$y(x) = y_{i-1} Z_1(x) + y_i Z_2(x) \quad (7)$$

де

$$Z_1(x) = \frac{x_i - x}{h_i}, \quad Z_2(x) = \frac{x - x_{i-1}}{h_i}, \quad x \in \Delta_i.$$

Значення  $y_i$  можна отримати розв'язуючи СЛАР з елементами  $a_{ij}$ ,  $i, j = 0, 1, \dots, n$  матриці  $A$

$$a_{ij} = \delta_{ij} + p_j \int_{x_{j-1}}^{x_j} K(x_i, \xi) Z_2(\xi) d\xi + q_j \int_{x_j}^{x_{j+1}} K(x_i, \xi) Z_1(\xi) d\xi$$

де  $p_j = q_j = 1$ ,  $j = 1, 2, \dots, n-1$ ,  $p_0 = 0$ ,  $q_n = 0$ . Координати вектора вільних членів цієї СЛАР є значення функції  $f(x)$ , що обчислені в вузлах сітки розбиття проміжку інтегрування.

Метод заміни ядра виродження зводить розв'язування (5) до розв'язування СЛАР  $A\bar{c} = \bar{f}$ , де елементи  $a_{ij}$  матриці  $A$  і  $f_i$  вільного вектора обчислюються за формулами

$$a_{ij} = \delta_{ij} + \int_a^b Q_i(\xi) P_j(\xi) d\xi,$$

$$f_i = \int_a^b Q_i(\xi) f(\xi) d\xi.$$

Тут  $\delta_{ij}$  - символ Кронекера,  $i, j = 1, 2, \dots, m$ . Ядро  $K(x, \xi)$  інтегрального рівняння замінено

наближеним виразом  $\sum_{k=1}^m P_k(x) Q_k(\xi)$ . Розв'язок рівняння (5) представляється у вигляді

$$u(x) = f(x) - \sum_{k=1}^m c_k P_k(x), \quad x \in [a, b]$$

Ітераційний процес методу послідовних наближень для рівняння (5) виглядає так:

$$\begin{cases} y_0 = 0; \\ y_k(x) = \int_a^b K(x, \xi) y_{k-1}(\xi) d\xi - f(x), \quad k = 1, 2, \dots; \quad x \in [a, b] \end{cases}$$

## Зміст

<b>Практична робота №1 "Чисельне інтегрування звичайних диференціальних рівнянь. Метод типу Рунге-Кутта"</b>	<b>2</b>
Постановка задачі	2
<b>Практична робота №2 "Чисельне інтегрування звичайних диференціальних рівнянь. Метод типу Адамса"</b>	<b>7</b>
Постановка задачі	7
<b>Практична робота №3 "Проекційні методи розв'язування крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь"</b>	<b>11</b>
Постановка задачі	11
<b>Практична робота №4 "Варіаційні методи розв'язування крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь"</b>	<b>13</b>
Постановка задачі	13
<b>Практична робота №5 "Балістичний метод розв'язування крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь"</b>	<b>15</b>
Постановка задачі	15
Застосовуючи балістичний метод знайти розв'язок крайової задачі	15
<b>Практична робота №6 "Метод скінчених різниць розв'язування крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь"</b>	<b>18</b>
Постановка задачі	18
Методом скінчених різниць знайти розв'язок крайової задачі з порядком апроксимації $O(h^2)$	18
Методом скінчених різниць знайти розв'язок крайової задачі з порядком апроксимації $O(h^2)$	18
<b>Практична робота №7 "Метод скінчених різниць розв'язування крайових задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку"</b>	<b>19</b>
Постановка задачі	19
Теоретичні відомості	19
<b>Практична робота №8 "Метод скінчених різниць розв'язування крайових задач для одновимірного рівняння теплопровідності"</b>	<b>21</b>
Постановка задачі	21
Теоретичні відомості	21
<b>Практична робота №9 "Метод скінчених різниць розв'язування крайових задач для одновимірного рівняння теплопровідності" (Частина II)</b>	<b>23</b>
Постановка задачі	23
Перевірка домашнього завдання практичної роботи №8	24
<b>Практична робота №10 "Поняття стійкості та апроксимації при використанні методу скінчених різниць"</b>	<b>25</b>
Постановка задачі	25
<b>Практична робота №11 "Різницеві схеми для рівнянь еліптичного типу"</b>	<b>26</b>
Постановка задачі	26
Теоретичні відомості	26
<b>Практична робота №12 "Факторизовані різницеві схеми для багатовимірних рівнянь гіперболічного типу"</b>	<b>28</b>
Постановка задачі	28
Теоретичні відомості	28
<b>Практична робота №13 "Чисельне розв'язування інтегральних рівнянь"</b>	<b>30</b>
Постановка задачі	30
Теоретичні відомості	30