Київський національний університет імені Тараса Шевченка
механіко-математичний факультет
кафедра математичної фізики

В.В.Попов.

Метод граничних інтегральних рівнянь

конспект лекцій
для студентів механіко-математичного факультету

Київ 2008

Вступ

Серед сучасних чисельних методів розв'язування крайових задач математичної фізики необхідно виділити три:

- метод скінчених різниць (МСР);
- метод скінчених елементів (МСЕ);
- метод граничних інтегральних рівнянь (МГІР).

Кожний з цих методів вже має не один десяток років теоретичного обгрунтування і практичної реалізації. Особливо стрімко в 50-х роках минулого століття почали своє життя перші два з вище названих методів - цьому сприяв прогрес обчислювальної техніки та нові науково-технічні задачі суспільства в розвідці надр Землі та обстеженні Космосу. Саме на основі МСР та МСЕ були розраховані важливі задачі механіки суцільного середовища (аерогідродинаміка та пружність космічних апаратів, фільтрація тощо), задачі будівельної механіки (роторні екскаватори, вежі тощо). Метод граничних інтегральних рівнянь досяг зрілості і почав своє самостійне життя в 70-х роках минулого століття після відомого наукового симпозіуму[1], що був присвячений саме використанню метода граничних інтегральних рівнянь.

Існують переваги і недоліки сучасних чисельних методів, як притягаючі так і відштовхуючі фактори. Метод скінчених різниць має найбільшу швидкість реалізації у розумінні побудови розв'язувальної системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР). І якби не обмеження щодо вигляду області шуканої функції, значень кроків дискретизації, проблеми стійкості, - був би метод скінчених різниць абсолютним переможцем-інструментарієм розв'язування крайових задач математичної фізики!

Певні обмеження методу скінчених різниць були зняті методом скінчених елементів. Головне досягнення МСЕ – зняття майже всіх обмежень щодо вигляду області шуканої функції: області шуканого розв'язку можуть бути і неканонічними. Крім цього, неабияким досягненням МСЕ є спеціальний вигляд матриці розв'язувальної СЛАР – ланцюговий. Для СЛАР з ланцюговими матрицями були розроблені відповідні схеми методу Гаусса, що враховували розрідженість матриці. І якби не обмеження щодо скінченості області шуканої функції та певна громіздкість при обчислюванні елементів розв'язувальної СЛАР, - був би метод скінчених елементів абсолютним переможцем-інструментарієм розв'язування крайових задач математичної фізики!!

Метод граничних інтегральних рівнянь знімає всі обмеження МСР і МСЕ щодо області шуканої функції та й ще знижує розмірність задачі на одиницю! І якби не щебільші ускладнення щодо обчислення елементів розв'язувальної СЛАР, - був би метод граничних інтегральних рівнянь абсолютним переможцем-інструментарієм розв'язування крайових задач математичної фізики!!!

Мабуть, і в математичній природі чисельних методів діють закони їх збереження: *кожний метод настільки привабливий, наскільки він технічно не зручний* (☺).

---

[1] Симпозіум був організований в червні 1975 року Комітетом з чисельних методів в прикладній механіці Американського товариства інженерів-механіків.

Основи методу граничних інтегральних рівнянь

Теорія потенцаілу є надзвичайно важливою частиною математичної фізики, що історично рано склалась і використовується в сучасних інтегральних методах розв’язування крайових задач. Теорія потенціалу вивчає властивості функцій, що можна використовувати в якості фундаментальних розв’язків диференціальних рівнянь. Таких функцій не так вже і багато, але їх властивості породжують велику кількість аналітичних та чисельних методів. За фізичним тлумаченням такі функції назвали *потенціалами*.

Ньютонів потенціал

Нехай в точці A з координатою ξ тривимірного простору зосереджена маса m. За законом Ньютона потенціал поля тяжиння в іншій точці x, що створюється цією масою, дорівнює

$$-\gamma \frac{m}{r},$$

де γ – гравітаційна константа, а $r(x, \xi)$ – відстань між точками x і ξ. Якщо позначити через $\rho(\xi)$ - щільність розподілу маси в деякій області V_ξ, то потенціал поля, створений точками цієї області, обчислиться інтегруванням

$$-\gamma \iiint\limits_{V_\xi} \frac{\rho(\xi)}{r(x,\xi)} dV_\xi \,.$$

Такий же вираз (з точністю до коефіцієнта) і у потенціала поля електричних зарядів, що розподілені з щільністю ρ. Спільну для цих випадків інтегральну величину

$$U(x) = \iiint\limits_{V_\xi} \frac{\rho(\xi)}{r(x,\xi)} dV_\xi \qquad (1)$$

називають *ньютоновим потенціалом.* Нютонів потенціал $U(x)$ використовують з відповідними за знаком коефіцієнтом для різних фізичних задач. Так, виходячи з того, що сили тяжіння додатні, похідні від потенціалу повинні бути теж додатні, що забезпечує від’ємний коефіцієнт перед інтегралом ($-\gamma$). Для потенціала поля електричних зарядів, виходячи з того, що одноіменні електричні заряди відштовхуються, перед інтегралом мусить бути додатній коефіцієнт.

Нехай функція $\rho(\xi)$ обмежена, має неперевні перші похідних, а на нескінченності зникає не повільніше ніж квадрат відстані від початку координат. Тоді відомі наступні властивості ньютонового потенціалу [3]:

1. Нютонів потенціал $U(x)$ задовольняє рівняння Пуассона

$$\Delta U = -4\pi\rho$$

2. Нютонів потенціал $U(x)$ має неперервні перші та другі похідні, причому похідні можна отримати диференціюванням під знаком інтегралу.
3. Так як функція $\dfrac{1}{r(x,\xi)}$ гармонічна при $\xi \in V_\xi$, $x \notin V_\xi$, нютонів потенціал $U(x)$ задовольняє рівняння Лапласа при $x \notin V_\xi$, тобто, іншими словами, поза областю мас або зарядів $U(x)$ є гармонічною.
4. Нютонів потенціал $U(x)$ допускає розклад в нескінчений ряд *потенціалів порядку n* (n=0,1,2,…). Ці потенціали теж гармонічні функції і можуть означати потенціали певних точечних об’єктів – мультиполів (диполь, квадруполь, октаполь і т.д.).

Потенціал простого шару

Нехай на замкненій та обмеженій поверхні Ляпунова S_ξ задана певна маса або заряд, а $\rho(\xi)$ - щільність цього розподілу. Потенціал $U(x)$ поля від цієї маси (заряду) можна отримати після інтегрування потенціалу одної точки

$$U(x) = \iint_{S_\xi} \frac{\rho(\xi)}{r(x,\xi)} dS_\xi \ , \tag{2}$$

де $r(x, \xi)$ – відстань між точками x і ξ. Функція $U(x)$ називається *потенціалом простого шару*, а $\rho(\xi)$ *–щільністю потенціалу простого шару*. Нехай функція $\rho(\xi)$ обмежена, має неперевні перші похідних, а на нескінченності зникає не повільніше ніж відстань від початку координат. Тоді відомі наступні властивості потенціалу простого шару [3]:

1. Якщо точка $x \notin S_\xi$, то потенціал простого шару $U(x)$ можна диференціювати безпосередньо під знаком інтегралу.
2. Так як функція $\dfrac{1}{r(x,\xi)}$ гармонічна при $\xi \in S_\xi$, $x \notin S_\xi$, потенціал простого шару $U(x)$ задовольняє рівняння Лапласа при $x \notin S_\xi$, тобто, іншими словами, $U(x)$ є гармонічною функцією.

Потенціал подвійного шару

Нехай на замкненій та обмеженій поверхні Ляпунова[2] S_ξ заданий шар диполей, а дипольний момент елементу dS_ξ цієї поверхні є добуток $\rho(\xi)dS_\xi$. Потенціал $U(x)$ поля від таких диполей можна отримати інтегруванням відповідного потенціалу одного диполя

$$U(x) = \iint_{S_\xi} \rho(\xi) \frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r(x,\xi)}\right) dS_\xi \ , \tag{3}$$

де $r(x, \xi)$ – відстань між точками x і ξ, n – зовнішня нормаль до поверхні S_ξ . Функція $U(x)$ називається *потенціалом подвійного шару*, а $\rho(\xi)$ *–щільністю потенціалу подвійного шару*. Нехай функція $\rho(\xi)$ обмежена, має неперевні перші похідних, а на нескінченності зникає не повільніше ніж квадрат відстані від початку координат. Тоді відомі наступні властивості потенціалу простого шару [3]:

1. Якщо точка $x \notin S_\xi$, то потенціал подвійного шару $U(x)$ можна диференціювати безпосередньо під знаком інтегралу.
2. Так як функція $\dfrac{1}{r(x,\xi)}$ гармонічна при $\xi \in S_\xi$, $x \notin S_\xi$, то потенціал подвійного шару $U(x)$ задовольняє рівняння Лапласа при $x \notin S_\xi$, тобто, іншими словами, $U(x)$ є гармонічною функцією.
3. Потенціал простого шару $U(x)$ при $\rho(\xi) \equiv 1$ представляє *телесний кут* $\omega(x)$

$$\iint_{S_\xi} \frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r(x,\xi)}\right) dS_\xi = -\omega(x) \ .$$

---

[2] Поверхня S називається *поверхнею Ляпунова*, якщо

a) в кожній точці S існує єдина нормаль;

b) для кожної точки $A \in S$ існує така сфера, що прямі паралельні нормалі в точці A перетинають частину S, що попала в середину сфери, не більше ніж в одній точці;

c) кут між нормалями в двух точках S задовольняє умові Гельдера.

Поведінка потенціалу простого шару та його нормальної похідної при перетинанні шару

Якщо використати достатню ознаку неперервності невласних інтегралів від параметру, то можна [3] прийти до висновку: потенціалу простого шару у всіх точках слоя, а, значить, і у всьому просторі є функцією неперервною. Що ж стосується нормальної похідної потенціалу простого шару, то тут діють такі властивості:

1. Нормальна похідна потенціалу простого шару на поверхні шару S_ξ є функцією неперервною.
2. Нормальна похідна потенціалу простого шару при перетину шару S_ξ змінює своє значення за рахунок начвності розриву. Ці розриви співпадають з розривами потенціалу подвійного шару при $\rho(\xi)\equiv 1$:

$$\iint\limits_{S_\xi} \frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r(x,\xi)}\right) dS_\xi = \begin{cases} -4\pi, x \in V_\xi \\ -2, x \in S_\xi \\ 0, x \notin V_\xi \cup S_\xi \end{cases}$$

де V_ξ – область, що обмежена поверхнею S_ξ.

Поведінка потенціалу подвійного шару при перетинанні шару

Потенціал подвійного шару $U(x)$ при наближенні до будь-якої точки x_0 шару зсередини чи ззовні прямує до значень $U^{\pm}(x_0)$:

$$U^{\pm}(x_0) = U_0(x_0) \pm 2\pi\rho(x_o),$$

де позначено

$$U_0(x_0) = \iint\limits_{S_\xi} \rho(\xi) \frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r(x,\xi)}\right) dS_\xi$$

- *пряме значення* потенціалу подвійного шару $U(x)$ в точці x_0. Обчислення прямого значення потенціалу подвійного шару в будь-якій точці x_0 шару відбувається в граничному розумінні: точка x_0 обмежується ε-окілом ω_ε радіусу r_ε і в якості значення $U_0(x_0)$ приймається границя

$$U_0(x_0) = \lim_{r_\varepsilon \to 0} \iint\limits_{S_\xi - \omega_\varepsilon} \rho(\xi) \frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r(x,\xi)}\right) dS_\xi .$$

Потенціали простого і подвійного шару у двовимірному просторі та їх зв'язок з інтегралом типу Коші

У двовимірному просторі потенціали простого та подвійного шару ще називаються *логарфмічними*. Ця назва спричинена наявністю певної логарифмічної функції. А саме, логарфмічним потенціалом простого шару називається функція

$$U(x) = \int\limits_{L_\xi} \rho(\xi) \ln \frac{1}{r(x,\xi)} d\sigma_\xi , \qquad (4)$$

де через L_ξ позначено криву Ляпунова. Аналогічно визначається логарфмічний потенціал подвійного шару

$$U(x) = \int\limits_{L_\xi} \rho(\xi) \frac{d}{dn} \ln \frac{1}{r(x,\xi)} d\sigma_\xi \qquad (5)$$

Ці функції успадкували властивість гармонічності від функції $\ln\dfrac{1}{r(x,\xi)}$ - фундаментального розв'язку двовимірного рівняння Лапласу.

Властивості логарфмічних потенціалів аналогічні властивостям тривимірних потенціалів. Крім цього цікавий їх зв'язок з інтегралом типу Коші. Будемо вважати , що L – гладка замкнута лінія, $\varphi(t)$ – дійсна функція комплексної змінної $t = \xi + i\eta \in L$[3]. Нехай $z = x + iy \notin L$. Розглянемо інтеграл типу Коші

$$\Phi(z) = U(x,y) + iV(x,y) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)dt}{t-z},$$

де $U(x,y)$, $V(x,y)$ – дійсні функції. Представляючи знаменник в інтегралі типу Коші в тригонометричній формі комплексного числа та здійснюючи логарифмічне диференціювання, отримаємо:

$$\frac{dt}{t-z} = d\ln(t-z) = d\ln(re^{i\vartheta}) = d\ln r + id\vartheta .$$

Тепер з урахуванням останнього та умовами Коші-Рімана для аналітичної функції $ln(t\text{-}z) = lnr+i\upsilon$ можна знайти вирази для дійсної та уявної частин інтегралу типу Коші:

$$U(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_L \varphi d\vartheta = \frac{1}{2\pi}\int_L \varphi\frac{d\vartheta}{ds}ds = \frac{1}{2\pi}\int_L \varphi\frac{d\ln r}{dn}ds\ ,$$

$$V(x,y) = -\frac{1}{2\pi}\int_L \varphi d\ln r = -\frac{1}{2\pi}\int_L \varphi\frac{dr}{r}.$$

Останню формулу можна спростити за допомогою інтегрування за частинами:

$$V(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_L \frac{d\varphi}{ds}\ln rds$$

Таким чином, отримали висновок:
дійсна частина інтегралу типа Коші є логарифмічний потенціал подвійного шару з щільністю $-\dfrac{\varphi}{2\pi}$, а уявна частина - логарифмічний потенціал простого шару з щільністю $-\dfrac{1}{2\pi}\dfrac{d\varphi}{ds}$.

Інтегральні формули

Нехай поверхні та лінії кусково-гладкі, а нормаль $\vec{n}$ до межі області - зовнішня. Відомі декілька інтегральних формул, що широко використовуються в математичній фізиці, зокрема, в теорії диференціальних рівнянь еліптичного типу.

Формула Остроградського-Гаусса:

$$\iiint_V div\vec{A}dV = \iint_{\partial V}(\vec{A}\vec{n})d\sigma\ , \tag{6}$$

де $\vec{A}$ – деяка векторна функція. Важливо, що користуватись формулою Остроградського-Гаусса можна і при наявності таких ліній (точок) на поверхні ∂V, де нормаль не існує. В цьому випадку при використанні формули (6) можна, наприклад, поверхню ∂V представляти сукупністю її гладких частин.

Формула Гріна:

$$\iiint_V (v\Delta u - u\Delta v)dV = \iint_{\partial V}(v\frac{du}{dn} - u\frac{dv}{dn})d\sigma\ , \tag{7}$$

---

[3] Загальний випадок лінії інтегрування та щільності $\varphi(t)$ інтегралу типу Коші безпосередньо можна звести до цього випадку.

де через Δ позначений оператор Лапласа. Відома також більш загальна формула Гріна, що використовується для двох спряжених диференціальних операторів другого порядку [3]. Формула Гріна (7) зберігає свій вигляд і для двовимірного випадку с тою лише різницею, що область V і її межа ∂V є відповідно поверхня та лінія.

Формула Гріна-Стокса:

$$u(x) = \iint_{\partial V} (L\frac{du}{dn} - u\frac{dL}{dn})d\sigma - \iiint_V (L\Delta u - u\Delta L)dV \,, \qquad (8)$$

де $L = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{r(x,\xi)} + \varphi(x,\xi)$, $r(x, \xi)$ – відстань між точками x і ξ, $\varphi(x, \xi)$ – будь-яка неперервна та обмежена в області V функція разом із своїми похідними до другого порядку. З формули Гріна-Стокса можна отримати важливу формулу для гармонічної функції $u(x)$ в обмеженій області V:

$$u(x) = \frac{1}{4\pi}\iint_{\partial V} (\frac{1}{r}\frac{du}{dn} - u\frac{d}{dn}\frac{1}{r})d\sigma \qquad (9)$$

Для двовимірного випадку формула (9) приймає вигляд:

$$u(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\partial V} (\ln\frac{1}{r}\frac{du}{dn} - u\frac{d}{dn}\ln\frac{1}{r})d\sigma \,, \qquad (10)$$

де область V і її межа ∂V є відповідно поверхня та лінія.

Основна формула теорії гармонічних функцій (*тотожність Гріна*):

$$\frac{1}{4\pi}\iint_{\partial V} (\frac{1}{r}\frac{du}{dn} - u\frac{d}{dn}\frac{1}{r})d\sigma = \begin{cases} 0, x \notin V \cup \partial V \\ \frac{1}{2}u(x), x \in \partial V \\ u(x), x \in V \end{cases} \qquad (11)$$

Для двовимірного випадку формула (11) приймає вигляд:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\partial V} (\ln\frac{1}{r}\frac{du}{dn} - u\frac{d}{dn}\ln\frac{1}{r})d\sigma = \begin{cases} 0, x \notin V \cup \partial V \\ \frac{1}{2}u(x), x \in \partial V \\ u(x), x \in V \end{cases} \qquad (12)$$

де область V і її межа ∂V є відповідно поверхня та лінія.

Метод потенціалу

Нехай дана крайова задача знаходження гармонічної функції в області V за певними крайовими умовами на її межі ∂V:

$$lu = g(x) \qquad (13)$$

Використовуючи представлення гармонічної функції через потенціали можна таку задачу звести до відповідного інтегрального рівняння відносно щільності потенціалу. Такі методи отримали назву *методів потенціалу*, або *інтегральних рівнянь*. Наприклад, використовуючи потенціал простого шару задача Діріхлє зводиться до інтегрального рівгяння Фредгольма першого роду відносно щільності $\rho(\xi)$:

$$\iint_{S_\xi} \frac{\rho(\xi)}{r(x,\xi)}dS_\xi = g(x) \qquad (14)$$

Якщо ж використовуючи потенціал подвійного шару задача Діріхлє зводиться до інтегральног рівняння Фредгольма другого роду відносно щільності $\rho(\xi)$:

$$\frac{1}{2}\rho(x) + \iint_{S_\xi} \frac{\rho(\xi)}{r(x,\xi)} dS_\xi = g(x) \tag{15}$$

Очевидно, розв'зувати задачу (14) складніше за рахунок її некоректності. Тому для задач Діріхлє в методі потенціалів використовують потенціал подвійного шару. З тією ж ціллю – отримати в решті-решт інтегральне рівняння Фредгольма другого роду - задача Неймана в методі потенціалів розв'язується за допомогою потенціалу простого шару. Для розв'язування інтегрального рівняння Фредгольма існують багато відпрацьованих методів і відповідних пакетів прикладних програм. Необхідно зауважити, що в сучасній обчислювальній математиці вважається розв'язок знайденним, якщо задача звелась до інтегрального рівняння Фредгольма.

Метод граничних інтегральних рівнянь для задач теорії потенціалу

Метод граничних інтегральних рівнянь належить до одного з методів інтегральних рівнянь. Але його ідея значно гнучкіша щодо використання в різних крайових задачах.

Розглянемо лінійну крайову задачу теорії потенціалу: знайти в області V гармонічну функцію $u(x)$ за крайовою умовою на її межі ∂V

$$a(x)u(x) + b(x)\frac{du(x)}{dn} = c(x) \tag{16}$$

Методом граничних інтегральних рівнянь складається з двох етапів. На першому етапі необхідно знайти розподіл на межі ∂V двох функцій: $u(x)$ і $v(x) = \frac{du(x)}{dn}$. Для цього складають систему двох рівнянь, одне з яких алгебраїчне рівняння (16), а друге рівняння в (11) - інтегро-алгебраїчне рівняння:

$$\frac{1}{4\pi}\iint_{\partial V}(\frac{1}{r}\frac{du}{dn} - u\frac{d}{dn}\frac{1}{r})d\sigma = \frac{1}{2}u(x), x \in \partial V \tag{17}$$

Після розв'язування системи рівнянь (16)-(17) переходять до другого етапу методу граничних інтегральних рівнянь – знаходження функції $u(x)$ в області V. Це здійснюється простими квадратурами на основі третього рівняння тієї ж тотожності Гріна (11)

$$u(x) = \frac{1}{4\pi}\iint_{\partial V}(\frac{1}{r}\frac{du}{dn} - u\frac{d}{dn}\frac{1}{r})d\sigma, x \in V \tag{18}$$

Звичайно, для двовимірного випадку все залишається аналогічним з тією різницею, що в основі методу використовується двовимірна тотожність Гріна (12).

Для задачі Діріхлє ($a(x) \equiv 0$) МГІР приводить до інтегрального рівгяння Фредгольма першого роду відносно функції $v(x)$. Для задачі Неймана ($b(x) \equiv 0$) МГІР приводить до інтегрального рівгяння Фредгольма другого роду відносно функції $u(x)$. Для задач типу Келдиша-Седова МГІР приводить до системи інтегральних рівгянь Фредгольма другого роду відносно функції $u(x)$ і інтегральних рівгянь Фредгольма першого роду відносно функції $v(x)$ на відповідних ділянках межі ∂V.

Розглянемо один з шляхів подолання недоліків методу граничних інтегральних рівнянь при розв'язуванні мішаної крайової задачі (16) теорії потенціалу – некоректність отриманих інтегральних рівнянь. У двовимірному випадку розглядається допоміжна гармонічна функція $v(x,y)$, що спряжена з функцією $u(x,y)$ умовами Коші-Рімана. Це дає змогу на відповідних ділянках записувати тотожність (12) не для функції $u(x,y)$, а саме для функції $v(x,y)$. Крім цього, щоб забезпечити замкнуту систему рівнянь, в (12) для шуканої функції $u(x,y)$ значення її нормальної похідної замінюється на відповідну похідну по дузі допоміжної функції $v(x,y)$ (з умов Коші-Рімана).

Зауажимо, що застосувуння методу ГІР можна легко поширити і на системи крайових задач.

Метод граничних інтегральних рівнянь для крайових задач аналітичних функцій комплексної змінної

Розглянемо лінійну крайову задачу для аналітичної функції $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ комплексної зміної $z = x + iy$ для області D

$$L_1 f(z) + \int_{\partial D} L_2 f(\varsigma) d\sigma = g(x,y), \quad (x,y) \in \partial D, \tag{19}$$

де L_1, L_2 – лінійні диференціальні оператори, що пов'язують на межі ∂D області D функції $u(x,y)$ і $v(x,y)$ та їх перші похідні, $g(x,y)$ – задана обмежена функція. Межа ∂D задається параметрично в залежності від дуги σ. До таких задач, як окремий випадок, належать задачі Діріхлє ($u(x,y)=g(x,y)$), Неймана ($\dfrac{\partial u(x)}{\partial n} = g(x)$), Гільберта ($a(x,y)u(x,y) + b(x,y)v(x,y)= g(x,y)$), Келдиша-Седова, мішані задачі теорії аналітичних функцій тощо. Відомо, що такі задачі успішно розв'язуються за допомогою інтеграла Коші для канонічних областей (круг, півплощина). Але для випадку неканонічних областей виникає проблема відображення таких областей на канонічні. Метод ГІР дає змогу обійти цю дію.

Перший крок при використанні метода ГІР – визначитись стосовно фунції, для якої запишеться тотожність Гріна (12). Зрозуміло, для відновлення шуканої аналітичної функції $f(z)$ можна було б обрати будь-яку з спряжених функцій $u(x,y)$ і $v(x,y)$, з яких вона складається, побудувати алгоритм методу граничних інтегральних рівнянь щодо цієї функції і остаточно розв'язувати систему інтегро-диференціальних рівнянь (тотожність Гріна (12), крайова умова (19) і умови Коші-Рімана). Але такий підхід може привести до некоректності отриманої системи рівнянь. Тому для поліпшення стійкості прийнята така схема побудова системи інтегро-диференціальних рівнянь, що забезпечує присутність невідомого позаінтегрального члену в (12). Для цього межа області розглядається як сукупність ділянок, за якими закріпляється відповідна шукана гармонічна функція. Так, для задачі Келдиша-Сєдова на ділянках, де відома з крайових умов функція $u(x,y)$, записується тотожність (12) для функції $v(x,y)$, і, навпаки, на ділянках, де відома з крайових умов функція $v(x,y)$, записується тотожність (12) для функції $u(x,y)$. Такий підхід впроваджується і при розв'язуванні крайових задач Гільберта, якщо один з коефіцієнтів задачі має нульові значення. Якщо коефіцієнти крайової задачі Гільберта не нульові на всій межі ∂D, то в якості гармонічної функції, для якої записується тотожність (12) може бути будь-яка з функцій $u(x,y)$ і $v(x,y)$. Після визначення функції для тотожності Гріна залишається зробити другий крок методу ГІР: розв'язати систему, що складається з тотожності Гріна та умови (19).

Метод граничних інтегральних рівнянь для крайових задач узагальнених аналітичних функцій комплексної змінної

Теорія p-аналітичних і (p, q)-аналітичних функцій була побудована, в основному, в працях Г.М.Положого [4]. Згідно з означенням, комплексно-значна функція $w(z) = \varphi(x,y) + i\psi(x,y)$ називається p-аналітичною, якщо вона в деякій області D площини $z = x + iy$ задовільняє системі рівнянь

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}=\frac{1}{p}\frac{\partial \psi}{\partial y}; \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y}=-\frac{1}{p}\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad , \tag{20}$$

де $p=p(x,y)$ – додатня функція , яка називається характеристикою функції w. Частковим випадком p-аналітичних функцій при $p = 1$ є аналітичні функції. Г.М.Положій також показав, що будь-яку систему диференціальних рівнянь першого порядку за допомогою афінних перетворень можна звести до системи (20), або до системи

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}}(\varphi+i\psi)=(a+ib)(\varphi-i\psi) \quad , \tag{21}$$

або до системи

$$p\frac{\partial \varphi}{\partial x}-q\frac{\partial \varphi}{\partial y}=\frac{\partial \psi}{\partial y}; \qquad p\frac{\partial \varphi}{\partial x}+q\frac{\partial \varphi}{\partial y}=-\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad , \tag{22}$$

де p, q, a і b – відомі функції. Функція, що задовільняє систему рівнянь (22), називається (p,q)-аналітичною функцією. Надалі обмежемо себе лише розгляданням p-аналітичних функцій.

Узагальнюючи теорію аналітичних функцій комплексної змінної Г.М.Положій та його учні поставили і розв´язали чимало теоретичних питань починаючи з означень і закінчуючи відомими теоремами, що дали можливість практично використовувати p-аналітичні функції в теорії пружності, гідромеханиці нестисливої рідини, дозвукової газової динаміки, тощо. Поряд з такими питаннями, як диференціювання та інтегрування p-аналітичних функції, були розглянуті диференціальні та топологічні властивості цих функцій, дана класифікація їх особих точок, побудована теорія лишків p-аналітичних функції. Якщо переглянути побудовану теорію p-аналітичних функцій, то там можна знайти багато питань, що споріднені з відповідними питаннями класичної теорії аналітичних функцій. Крім таких класичних питань теорія p-аналітичних функцій містить ще один важливий розділ: інтегральне представлення спеціальних класів p-аналітичних функцій, формули їх обернення і розв´язок крайових задач. Саме теорія цього розділу дала поштовх до розв´язання багатьох задач осесиметричної теорії пружності (оболонки обертань, штампи та системи штампів, тощо). В прикладних задачах найбільше значення мають p-аналітичні функції з характеристикою $p = x^k$ *, де к>0*. Згідно з теорією Г.М.Положого існує основне інтегральне представлення p-аналітичних функцій з характеристикою $p = x^k$ та формули його обернення. У подальшому виникне необхідність звертатись до цих формул. Наведемо їх [4].

Нехай G – область в правій півплощині $z = x + iy$, $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ - аналітична функція в області G. Тоді x^k-аналітичну функцію $w(z) = \varphi(x,y) + i\psi(x,y)$ можна представити інтегральним співвідношенням через аналітичну функцію $f(z)$, а саме

$$\begin{aligned} w(z) &= \operatorname{Re}\int_{z_0}^{z} f(\varsigma)\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)^{1-k}(z-\varsigma)^{\frac{k}{2}-1}(\bar{z}+\varsigma)^{\frac{k}{2}-1}d\varsigma + \\ & i\operatorname{Im}\int_{z_0}^{z} f(\varsigma)\left(\varsigma-\frac{z-\bar{z}}{2}\right)(z-\varsigma)^{\frac{k}{2}-1}(\bar{z}+\varsigma)^{\frac{k}{2}-1}d\varsigma, \qquad \varsigma=\xi+i\eta \end{aligned} \tag{23}$$

Інтегрування в співвідношенні (23) ведеться від z_0 до z увздовж будь-якого кусково-гладкого контура $\Gamma \in G$. При цьому можливі три випадки, коли $w(z)$ дійсно буде x^k-аналітичною функцією:

a) L – відрізок уявної осі, $L \in \partial G$, $Im\, f(z)=0$, $z \in L$, z_0 – будь-яка точка відрізку L;
b) область G в своїй межі має точку $z_0 = \infty$ і при $z \to z_0$ вздовж контура Γ існує дотична до нього і $f(z)=O(|z|^{-k-\varepsilon})$ (ε = const >0);
c) z_0 - будь-яка фіксована точка межі області G ($z_0 \neq \infty$) при $z \to z_0$ вздовж контура Γ $f(z)=O(|z- z_0|^{-1+\varepsilon})$ (ε = const >0).

Розглянемо лінійну крайову задачу для p-аналітичної функції $w(z) = \varphi(x,y) + i\psi(x,y)$ комплексної зміної $z = x + iy$ для області D

$$L_1 w(z) + \int_{\partial D} L_2 w(\varsigma) d\sigma = g(x, y), \quad (x, y) \in \partial D, \qquad (24)$$

де L_1, L_2 – лінійні диференціальні оператори, що пов'язують на межі ∂D області D функції $\varphi(x,y)$ і $\psi(x,y)$ та їх перші похідні, $g(x,y)$ – задана обмежена функція. Межа ∂D задається параметрично в залежності від дуги σ. До таких задач, як окремий випадок, належать задачі Діріхлє, Неймана, Гільберта, Келдиша-Седова, мішані задачі теорії p-аналітичних функцій тощо. Для побудови чисельного розв'язку поставленої задачі (24) впроваджуються два алгоритми, заснованих на інтегральному предсталенні Г.М.Положого [4], що зв'язує шукану p–аналітичну функцію $w(z)$ з аналітичною функцією $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$. Обидва алгоритми приводять до інтегрального рівняння Фредгольма II роду.

Перший алгоритм призначений для більш вузького кола крайових задач. Такі задачі при використанні оберненого представлення Г.М.Положого можна звести до відомих задач аналітичної функції. При цьому вважається, що конформне відображення області D на канонічну – відоме, а інтегральний член з оператором L_2 в крайовій умові відсутній. Першим алгоритмом можна розв'язувати задачі про удар твердого осесиметричного тіла о поверхню нестисливої рідини, про штамп на пружній поверхні тощо. При певних умовах такі задачі розв'язуються в квадратурах.

Другий алгоритм заснований на використанні інтегрального представлення Г.М.Положого і співвідношень методу ГІР. Ідея алгоритму полягає в тому, щоб, по-перше, за допомогою інтегрального представлення Г.М.Положого отримати крайову умову для аналітичної функції $f(z)$, а далі, використовуючі цю умову і основне співвідношення теорії гармонічних функцій для функції $u(x,y)$ (або $v(x,y)$), побудувати систему двох інтегро-диференціальних рівнянь, тобто діяти так, як описано в попередньому розділі.

Метод граничних інтегральних рівнянь і апроксимація розв'язку

Задача чисельного розв'язування інтегральних рівнянь відома і має достатню кількість опрацьованих методів. Перелічемо лише декілька найпоширених з них:

- метод квадратур;
- метод зведення інтегрального рівняння до іншого з виродженими ядром;
- метод коллокації;
- метод сплайн-апроксимації.

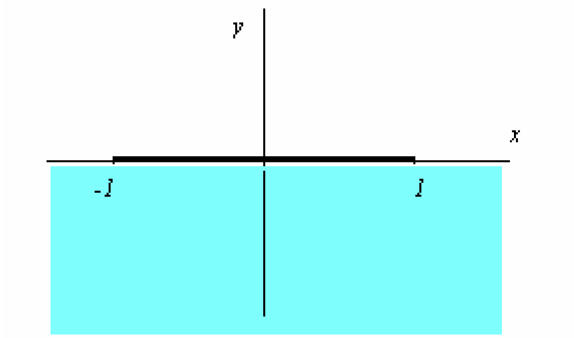
При виборі методу чисельного розв'язування інтегральних рівнянь необхідно керуватись, перш за все, структурою цих рівнянь. Метод граничних інтегральних рівнянь та його використання породжує, по-перше, такі інтегральні рівняння, що записуються відносно шуканої функції та її похідної по межі інтегрування. По-друге, ці інтегральні рівняння для просторових задач мають ядра з полярною особливістю (логарифмічну особливість - в двовимірному випадку). Перший фактор обмежує порядок апроксимації: вибір кусково-постійної апроксимації породжую проблему апроксимації похідних шуканої функції. При умові апроксимації шуканих функцій лінійними або кубічними сплайнами похідна по дузі шуканої функції має певний вигляд і всі труднощі залишаються лише при формуванні елементів системи лінійних алгебраїчних рівнянь щодо параметрів сплайну. Саме тут варто зосередитись на чисельному інтегруванні функцій з полярною (або логарифмічною) особливістю та розкритті невизначеності при обчисленні похідної по нормалі від потенціалу (логарифмічного потенціалу) при $P \to Q$. Один з методів чисельного інтегрування функцій з полярною (або логарифмічною) особливістю передбачає заміну змінної інтегрування новою через степеневу функцію (як правило, показник степеня дорівнює 2). Крім такого інтегрування можна використати формули найвищого алгебраїчного степеня точності, що побудовані для вагової функції з логарифмічною особливістю. Розкриття невизначеності при $P \to Q$ при обчисленні похідної по нормалі від потенціалу під знаком інтегралу здійснюється за допомогою відомого правила Лопіталя.

При виборі сплай-апроксимації вищого степеня необхідно зосередитись перш за все на чисельному розв'язку в околі вузлових точок межі області. Розв'язок суттєво залежать від вибору крайових умов побудови шуканих сплайн-функції. Ці додаткові умови можна часто знайти, якщо врахувати міркування щодо фізичного явища задачі.

Приклади використання методу граничних інтегральних рівнянь

Мішана задача для гармонічної функції на півплощині

Постановка задачі. Знайти гармонічну в нижній півплощині ($y < 0$) функцію $u(x,y)$, якщо на її межі ($y = 0$) виконуються крайові умови:



$$u(x,0) = 0, \qquad |x|>=1 \tag{25}$$

$$u_n(x,0) = -1, \qquad |x|<=1 \tag{26}$$

Крайова задача (25)-(26) відома [5] і відповідає фізичній задачі про удар пластини одиничної напівширини, що пдаває на поверхні ідеальної нестисливиї рідини та отримала одиничну швидкість після удару, а функція $u(x,y)$ – потенціальна функція течії рідини в момент часу, безпосередній після удару.

Точний розв'язок задачі. За допомогою методів теорії комплексної змінної (конформне перетворення функцією Жуковського та інтеграл Шварца) можна отримати єдиний розв'язок крайової задачі (25)-(26), що на межі області доповнює крайові умови:

$$u(x,0) = -\sqrt{1-x^2}, \qquad |x| \le 1$$

$$u_n(x,0) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} - 1, \qquad |x| > 1$$

Чисельне розв'язування задачі. Перш за все, необхідно зазначити, що шуканий розв'язок $u(x,y)$ зникає на нескінченності. Це обмеження продиктоване постановкою задачі (умова (25)) та аналізом розв'язку, якщо за функцію вибрати один з методів потенціалу (наприклад, представити гармонічну функцію $u(x,y)$ потенціалом простого шару).

Використаємо чисельний метод граничних інтегральних рівнянь. Згідно з цим методом спочатку необхідно знайти функцію $u(x,y)$ та її нормальну похідну $u_n(x,y)$ на межі області. Позначимо ці функції через φ і ψ: $\varphi(x) = u(x,0)$, $\psi(x) = u_n(x,0)$.

За рахунок вигляду межі області – пряма лінія – можна отримати важливу властивість похідної $\frac{d}{dn}\ln\frac{1}{r}$: виявляється, що на прямих лініях ця похідна дорівнює нулю (довести самостійно). За рахунок цього суттєво спрощується використання МГІР. З тотожності Гріна маємо

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \ln\frac{1}{r(x,\xi)}\psi(\xi)d\xi = \frac{1}{2}\varphi(x) \tag{27}$$

Врахуємо симетрію задачі відносно осі *Oy*: функції $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ – парні (переконатись самостійно). Парність цих функцій зменшує область розв'язування задачі з $(-\infty, +\infty)$ до $[0, +\infty)$, тобто, надалі вважаємо, що $x \in [0, +\infty)$. Інтегрування в (27) на частині проміжку $(-\infty, 0]$ через заміну $\xi \leftarrow -\xi$ можна звести до інтегрування на проміжку $[0, +\infty)$. В результаті з (27) маємо

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}\ln\frac{1}{r(x,\xi)}\frac{1}{r(x,-\xi)}\psi(\xi)d\xi = \frac{1}{2}\varphi(x) \tag{28}$$

Очевидно відстані $r(x, \xi) = |x - \xi|$ і $r(x, -\xi) = |x + \xi|$. Враховуючи ці співвідношення інтегральне рівняння (28) приймає вигляд

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}\ln\frac{1}{\left|x^2-\xi^2\right|}\psi(\xi)d\xi = \frac{1}{2}\varphi(x) \tag{29}$$

Тепер можна звернутись до крайових умов (25)-(26). В термінах введених функцій ці умови запишуться так

$$\varphi(x) = 0, \ |x| >= 1 \tag{30}$$

$$\psi(x) = -1, \ |x| <= 1 \tag{31}$$

Для $x \in (1, +\infty)$ рівняння (29) з урахуванням умов (30)-(31) перетворюється в інегральне рівняння Фредгольма першого роду відносно функції $\psi(x)$:

$$\int_1^{+\infty} K(x,\xi)\psi(\xi)d\xi = f(x), \tag{32}$$

де позначено

$$K(x,\xi) = \ln\left|x^2-\xi^2\right|$$

$$f(x) = \int_0^1 K(x,\xi)d\xi$$

Для $x \in [0, 1]$ рівняння (29) з урахуванням умов (30)-(31) перетворюється в формулу для знаходження функції $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi}\left(f(x) - \int_1^{+\infty} K(x,\xi)\psi(\xi)d\xi\right) \tag{33}$$

Подальше чисельне розв'язування інтегрального рівняння (32) та обчислення квадратур (33) залежить від апроксимації шуканої функції $\psi(x)$.

Звичайно, некоректність рівняння Фредгольма (32) необхідно усунути одним з методів регуляризації. Але за рахунок особливості ядра при $x=\xi$ можна сподіватись на ефект саморегуліризації при відповідній його чисельній реалізації. При необхідності регуляризацію можна провести на останньому етапі чисельного розв'язування інтегрального рівняння - для розв'язувальної СЛАР (Додаток), що отримується в результаті апроксимації шуканої функції $\psi(x)$.

Метод коллокації

Побудуємо алгоритм чисельного розв'язування рівняння (32) на основі кусково-постійної апроксимації шуканої функції $\psi(x)$ - метод *коллокації*.

Так як на нескінченості функція $\psi(x)$ зникає (разом із функцією $u(x,y)$, то на півнескінченому відрізку розбиття її можна апроксимувати нулем. Позначимо через R_∞ - координату останнього кінцевого вузла розбиття межі $[1, +\infty)$. Нехай x_i, $i=0,1,\ldots,n$ – вузлові точки розбиття, причому $x_n = R_\infty$. Одним з можливих прийомів неравномірного розбиття відрізку $[a, b]$ полягає у використанні експоненціальної функції:

$$x_i = a + (b-a)\frac{\exp(i\alpha/n)-1}{\exp(\alpha)-1},$$

причому вузли згущаються біля лівої межі, якщо параметр розбиття $\alpha>0$. Наприклад, якщо вибрати $\alpha = 10$, то ризбиття відрізку $[1, 100]$ буде таким:

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x[i]$	1,000	1,008	1,029	1,086	1,241	1,663	2,809	5,925	14,39	37,42	100,0

Важливо, щоб в даній задачі достатня кількість вузлів розбиття попала в зону дії особливої точки $x = 1$. Як правило така зона за довжиною дорівнює двом-трьом характерних розмірів. Характерний розмір для данної задачі є одиниця, значить приблизно половина вузлів повинна бути в межах від x=1 до x=2. Наведений приклад відповідає таким вимогам.

За методом коллокації шукаємо наближені значення функції $\psi(x)$ в срединних точках (точках коллокації) кожного відрізку $\Delta_i = [x_{i-1}, x_i]$. Позначимо точки коллокації через $\bar{x}_i = (x_{i-1} + x_i)/2$, $i=1,2,...,n$, а шукані наближені значення функції $\psi(x)$ в цих точках - через y_i. Матриця A і вектор вільних членів $\vec{f}$ розв'зувальної системи лінійних алгебраїчних рівнянь методу коллокації відносно чисел y_i має вигляд:

$$A = \{a_{i,j}\}_{i,j=1}^{n}, \qquad a_{i,j} = \int_{x_{j-1}}^{x_j} K(\bar{x}_i, \xi)d\xi$$

$$\vec{f} = \{f_i\}_{i=1}^{n}, \qquad f_i = \int_{0}^{1} K(\bar{x}_i, \xi)d\xi$$

Чисельне знаходження елементів $a_{i,j}$, f_i здійснюється за відомими квадратурними формулами. Якщо скористатись формулами середніх прямокутників, то наближене чисельне значення позадіагональних елементів матриці буде

$$a_{i,j} = K(\bar{x}_i, \bar{x}_j)h_j,\ i \neq j,$$

де через h_j позначено довжина j-ої ділянки розбиття: $h_j = x_j - x_{j-1}$. Обчислення діагональних елементів $a_{i,i}$ необхідно виконати з врахуванням логарифмічної особливості ядра $K(x, \xi)$. Один з підходів – використання найпростіших формул найвищого алгебраїчного степеня точності. Побудуємо таку одновузлову формулу

$$I \cong A_1 u(x_1) \tag{33}$$

для визначеного інтеграла

$$I = \int_a^b p(c,\xi)u(\xi)d\xi \tag{34}$$

де вагова функція $p(c,\xi) = \ln\left|c^2 - \xi^2\right|$. Коефіцієнт A_1 квадратурної формули та її вузол x_1 знаходяться з системми рівнянь, заснованих на відомій теоремі про квадратурні формули найвищого алгебраїчного степеня точності. В данному випадку, коли кількість вузлів лорівнює одиниці, квадратурна формула повинна бути точною для многочленів нульвого та першого степеня. Тобто, маємо рівності

$$\int_a^b p(c,\xi)d\xi = A_1$$

$$\int_a^b p(c,\xi)\xi d\xi = A_1 x_1$$

Первісні I_ln та I_xln для відповідних невизначених інтегралів відомі [5], а саме

$$\mathrm{I\_ln}(\xi,\mathrm{c}) = \int p(c,\xi)d\xi = \int \ln\left|c^2-\xi^2\right|d\xi = (\xi-c)\ln\left|\xi-c\right| + (\xi+c)\ln\left|\xi+c\right| - 2\xi\,,$$

$$\mathrm{I\_xln}(\xi,\mathrm{c}) = \int p(c,\xi)d\xi = \int \ln\left|c^2-\xi^2\right|\xi d\xi = \frac{1}{2}\left[(\xi^2-c^2)\ln\left|\xi^2-c^2\right| - \xi^2\right].$$

Таким чином,

$$\mathrm{A}_1 = \mathrm{I\_ln}(\xi,\mathrm{c})\Big|_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}}, \qquad \mathrm{x}_1 = \mathrm{I\_xln}(\xi,\mathrm{c})\Big|_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} / A_1. \qquad (35)$$

Для використанняя параметрів A_1 і x_1 квадратурної формули необхідно, щоб $A_1 \neq 0$, $x_1 \in [a, b]$ (дослідити самостійно).

Наближене чисельне значення елементів вільного вектору здійснюється також за формулами середніх прямокутників попередньо розбивши проміжок інтегрування на m рівних частин:

$$f_i = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} K(\bar{x}_i, \frac{j-0.5}{m}),\; i=1,2,\ldots,n$$

Після побудови СЛАР її розв'язування можна здійснити оною з схем методу Гаусса, наприклад схемою оптимального виключення (Додаток).

Метод лінійної сплайн-апроксимації

Побудуємо алгоритм чисельного розв'язування рівняння (32) на основі кусково-лінійної апроксимації шуканої функції $\psi(x)$: *методу лінійної сплайн-апроксимації*. Розбиття проміжку інтегрування здійснюється так, як і при використанні методу коллокації, в тому числі залишаются припущення щодо параметру R_∞. Позначимо наближені значення шуканої функції $\psi(x)$ в вузлах x_i розбиття через y_i, $i = 0,1,\ldots,n$. Тоді згідно з лінійною сплайн-апроксимацією на кожному проміжку Δ_i, $i = 1,2,\ldots,n$, функція $\psi(x)$ має вигляд

$$\psi(x) = y_{i-1} Z_1(x) + y_i Z_2(x) \qquad (36)$$

де $Z_1(x)$, $Z_2(x)$ – лінійні функції відносно x:

$$Z_1(x) = \frac{x_i - x}{h_i}, \qquad Z_2(x) = \frac{x - x_{i-1}}{h_i}, \qquad h_i = x_i - x_{i-1}.$$

З використанням апроксимації (36) і розбиття проміжку інтегрування інтегральне рівняння (32) в кожному вузлі x_i запишеться так

$$\sum_{j=1}^{n}\int_{x_{j-1}}^{x_j} K(x_i,\xi)(y_{j-1}Z_1(\xi) + y_j Z_2(\xi))d\xi = f(x_i), \qquad i = 0,1,\ldots,n. \qquad (37)$$

З рівностей (37) формується матриця A і вектор вільних членів $\vec{f}$ розв'зувальної системи лінійних алгебраїчних рівнянь методу лінійної сплайн-апроксимації відносно чисел y_i:

$$A = \{a_{i,j}\}_{i,j=1}^{n},$$

$$a_{i,j} = \int_{x_{j-1}}^{x_j} K(x_i, \xi) Z_2(\xi) d\xi + \int_{x_j}^{x_{j+1}} K(x_i, \xi) Z_1(\xi) d\xi, \; j = 1,2,...,n-1$$

$$a_{i,0} = \int_{x_0}^{x_1} K(x_i, \xi) Z_1(\xi) d\xi,$$

$$a_{i,n} = \int_{x_{n-1}}^{x_n} K(x_i, \xi) Z_2(\xi) d\xi$$

$$\vec{f} = \{f_i\}_{i=1}^{n}, \quad f_i = \int_0^1 K(x_i, \xi) d\xi$$

Чисельне знаходження визначених інтегралів у виразу для елементів $a_{i,j}$ здійснюється за квадратурною формулою (33) з її коефіцієнтом A_1 і вузлом x_1 (35), що отримані для вагової функції $p(c,\xi) = K(c,x) = \ln\left|c^2 - \xi^2\right|$. Тут необхідно зробити зауваження щодо алгоритму обчислення елементів $a_{i,j}$. Формули, що наведені вище, є результат зведення подібних в (37). Цю операцію простіше та зручно виконувати за таким алгоритмом з циклами:

A←0;
для** i ← 0 **до** n **повторити
  для** j ← 1 **до** n **повторити
    $a_{i,j-1} \leftarrow a_{i,j-1} + \int_{x_j}^{x_{j+1}} K(x_i, \xi) Z_1(\xi) d\xi$
    $a_{i,j} \leftarrow a_{i,j} + \int_{x_{j-1}}^{x_j} K(x_i, \xi) Z_2(\xi) d\xi$
  кінець циклу
кінець циклу

Наближене чисельне значення елементів вільного вектору здійснюється також з використанням формули (33) попередньо розбивши проміжок інтегрування на m рівних частин:

$$f_i = \sum_{j=1}^{m} \int_{(j-1)h}^{jh} K(x_i, \xi) d\xi, \; i = 0,1,...,n, \; h = 1/m.$$

Метод асимптотичної коллокації

В попередніх апроксимаціях не враховується можливу особливість шуканого розв'язку в околі вузла зміни крайових умов. Аналіз мішаної крайової задачі (25)-(26) приводить до твердження: існує єдиний розв'язок цієї задачі при умові, що шукана функція u_n на проміжку $[1, \infty)$ в околі точки $x = 1$ має полярну особливість степеня 1/2. Ця обставина та парність шуканого розв'язку приводить до відповідної апроксимації функції $\psi(x)$. А саме, на першій ділянці розбиття $[x_0, x_1]$, де $x_0 = 1$, можна функцію $\psi(x)$ апроксимувати так.

$$\psi(x) = \frac{\psi_0}{\sqrt{1-x}} \tag{38}$$

На проміжках розбиття, починаючи з другого, можна вибирати ту чи іншу апроксимацію шуканої функції $\psi(x)$. Якщо вибрати кусково-постійну апроксимацію, то такий метод розв'язування інтегрального рівняння (32) будемо називати методом *асмптотичної коллокації*. Чисельна реалізація методом асмптотичної коллокації в порівнянні з методом коллокації приведе до змін лише елементів першого стовпчика матриці A розв'зувальної системи лінійних алгебраїчних рівнянь. З врахуванням (38) маємо

$$a_{i,1} = \int_{x_0}^{x_1} \frac{1}{\sqrt{1-\xi}} K(\bar{x}_i, \xi) d\xi \qquad (39)$$

Очевидно, обчислення інтегралу (39) здійснюється різними формулами в залежності від значення координати $\bar{x}_i$ точки коллокації: для $i = 1$ необхідно врахувати полярно-логарифмічну особливість підінтегрального виразу:

$$a_{1,1} = \int_{x_0}^{x_1} \frac{1}{\sqrt{1-\xi}} K(\bar{x}_1, \xi) d\xi = \int_{1}^{x_1} \frac{1}{\sqrt{1-\xi}} \ln\left|\bar{x}_1^{\,2} - \xi^2\right| d\xi\,, \qquad (40)$$

а для $i > 1$ – полярну:

$$a_{i,1} = \int_{x_0}^{x_1} \frac{1}{\sqrt{1-\xi}} K(\bar{x}_i, \xi) d\xi = \int_{1}^{x_1} \frac{1}{\sqrt{1-\xi}} \ln\left|\bar{x}_i^2 - \xi^2\right| d\xi, i = 2,3,...,n \qquad (41)$$

Для обчислення визначених інтегралів (40)-(41) можна скористатись відомими [6] первісними функціями для інтегралу вигляду $\int \frac{\ln x\, dx}{\sqrt{a+bx}}$. А саме,

для $a>0$ $\displaystyle\int \frac{\ln x\, dx}{\sqrt{a+bx}} = \frac{2}{b}\left\{(\ln|x|-2)\sqrt{a+bx} + \sqrt{a}\ln\left|\frac{\sqrt{a+bx}+\sqrt{a}}{\sqrt{a+bx}-\sqrt{a}}\right|\right\}$,

для $a<0$ $\displaystyle\int \frac{\ln x\, dx}{\sqrt{a+bx}} = \frac{2}{b}\left\{(\ln|x|-2)\sqrt{a+bx} + 2\sqrt{-a}\; arctg\sqrt{\frac{a+bx}{-a}}\right\}$.

Тепер визначені інтеграли (40)-(41) набувають значень:

$$a_{i,1} = \int_1^{x_1} \frac{\ln|\bar{x}_i - \xi|}{\sqrt{1-\xi}} d\xi + \int_1^{x_1} \frac{\ln|\bar{x}_i + \xi|}{\sqrt{1-\xi}} d\xi = 2\left\{(\ln|x-\bar{x}_i|-2)\sqrt{x-1} + \sqrt{\bar{x}_i - 1}\ln\left|\frac{\sqrt{x-1}+\sqrt{\bar{x}_i-1}}{\sqrt{x-1}-\sqrt{\bar{x}_i-1}}\right|\right\}\Bigg|_1^{x_1} +$$

$$2\left\{(\ln|x+\bar{x}_i|-2)\sqrt{x-1} + \sqrt{\bar{x}_i+1}\; arctg\sqrt{\frac{x-1}{\bar{x}_i+1}}\right\}\Bigg|_1^{x_1} =$$

$$2\left\{(\ln|x_1-\bar{x}_i|-2)\sqrt{x_1-1} + \sqrt{\bar{x}_i - 1}\ln\left|\frac{\sqrt{x_1-1}+\sqrt{\bar{x}_i-1}}{\sqrt{x_1-1}-\sqrt{\bar{x}_i-1}}\right|\right\} +$$

$$2\left\{(\ln|x_1+\bar{x}_i|-2)\sqrt{x_1-1} + \sqrt{\bar{x}_i+1}\; arctg\sqrt{\frac{x_1-1}{\bar{x}_i+1}}\right\}, i = 1,2,...,n$$

Література

1. Метод граничных интегральных уравнений. Сб. научн. тр. под редакцией Т.Круз, Ф.Рищо. –М.: МИР, 1978. –210с.
2. Бреббия К. и др.. Методы граничных элементов. –М.: МИР, 1987. –524с.

3. Кошляков Н.С. и др. Уравнения в частных производных математической физики. Учеб. пособие для мех.-мат. фак. ун-тов. М.: Высшая школа, 1970. –712с.
4. Положий Г.Н. Теория и применение *p*–аналитических и (*p,q*)-аналитических функций. – К.: Наукова думка, 1973. –423с.
5. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1973. –736с.
6. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. –М.: Наука, 1971. –1108с.
7. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. –М: Наука, 1968. –512с.
8. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. –М: Наука, 1986. –288с.

Додаток

Регуляризація системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Нехай дана СЛАР:

$$A\vec{u} = \vec{f}$$

з числом обумовленості $\nu = cond(A)$ неособливої матриці A, причому $\nu >> 1$. Позначимо через A^T – транспоновану до A матрицю, ε - похибку вихідних даних. Регуляризована СЛАР має вигляд

$$(A^T A + \alpha E)\vec{u}_\alpha = A^T \vec{f},$$

де α - параметр регуляризації, $\vec{u}_\alpha$ - її розв'язок. Число обумовленості регуляризованої СЛАР залежить від α і може приймати значень істотно менші за ν. Параметр регуляризації α підбирається так, щоб невязка $R(\alpha) = \|\vec{R}\| = \|A\vec{u}_\alpha - \vec{f}\| \approx \varepsilon$.

Модуль MGIR програм обслуговування методу граничних інтегральних рівнянь (*Pascal*)

```
unit MGIR;
INTERFACE
const n_max=100;
type  vector=array[0..n_max] of real;
      matrix = array [0..n_max,0..n_max] of real;
procedure Optima (A: matrix; var F: vector ; nc: integer);
Procedure Setka(a,b,alfa: real; n: integer; var x: vector);
Function I_ln(x,c: real): real;
Function I_xln(x,c: real): real;
Function Z1(xx: real; i: integer; x: vector): real;
Function Z2(xx: real; i: integer; x: vector): real;IMPEMENTATION
procedure Optima (A: matrix; var F: vector ; nc, n0: integer);
   { МЕТОД ОПТИМАЛЬНОГО ВИКЛЮЧЕННЯ ГАУССА
          A, F, nc, n0 -  матриця, вільний член, порядок системи, початкове значення індексу;
          F - результат обчислень}
VAR
     I,J,K,L           :INTEGER;
     S,C,AC            :REAL;
     UKAZ              :ARRAY[0..n_max] OF INTEGER;
BEGIN
 FOR I:= n0 TO nc DO
 BEGIN
          { ВИКЛЮЧЕННЯ В ПОТОЧНОМУ РЯДКУ }
  FOR k:= n0 TO I-1 DO
  BEGIN C:=A[I,UKAZ[K]];
   FOR J:=1 TO nc DO A[I,J]:=A[I,J]-A[K,J]*C;
   F[I]:=F[I]-F[K]*C
  end;
  { НОРМУВАННЯ В ПОТОЧНОМУ РЯДКУ }
```

```
  C:=A[I,1]; AC:=ABS(C); UKAZ[I]:= n0;
  FOR J:= n0+1 TO nc DO
  BEGIN
   S:=ABS(A[I,J]);
   IF S>AC THEN BEGIN C:=A[I,J]; AC:=S; UKAZ[I]:=J end;
  end;
  FOR J:= n0 TO nc DO A[I,J]:=A[I,J]/C;
  F[I]:=F[I]/C; L:=UKAZ[I];
  { ВИКЛЮЧЕННЯ В ПОПЕРЕДНІХ РЯДКАХ }
  FOR K:= n0 TO I-1 DO
  BEGIN
   C:=A[K,L];
   FOR J:= n0 TO nc DO A[K,J]:=A[K,J]-A[I,J]*C;
   F[K]:=F[K]-F[I]*C
  end
 end;
{ СОРТУВАННЯ }
 FOR K:= n0 TO nc DO A[UKAZ[K], n0]:=F[K];
 FOR K:= n0 TO nc DO F[K]:=A[K, n0]
end; {  Optima  }

Procedure setka(a,b,alfa:real;n:integer;var x:vector);
var i:integer;
    h:real;
begin
 if alfa=0 then
 begin
  h:=(b-a)/n;
  for i:=0 to n do
  x[i]:=a+h*i;
 end
 else
 begin
   for i:=0 to n do
   x[i]:=a+(b-a)*(exp(alfa*i/n)-1)/(exp(alfa)-1);
 end;
end; {Setka}

Function I_ln(x,c:real):real;
var xc,xc_:real;
begin
 xc:=abs(x+c); xc_:=abs(x-c);
 if (xc<1.0E-5) and (xc_<1.0E-5)
 then
  I_ln:=-2*x
 else
  if xc<1.0E-5
  then
   I_ln:=(x-c)*ln(abs(x-c))-2*x
  else
```

```
   if xc_<1.0E-5
   then
    I_ln:=(x+c)*ln(abs(x+c))-2*x
   else
    I_ln:=(x-c)*ln(abs(x-c))+(x+c)*ln(abs(x+c))-2*x
end;

Function I_xln(x,c:real):real;
var xc,axc: real;
begin
 xc:=x*x-c*c; axc:=abs(xc);
 if axc<1.0E-5
 then
  I_xln:=-x*x/2
 else
  I_xln:=((x*x-c*c)*ln(abs(x*x-c*c))-x*x)/2
end;

Function Z1(xx: real; i: integer; x: vector): real;
begin
 Z1:=(x[i]-xx)/(x[i]-x[i-1])
end;

Function Z2(xx: real; i: integer; x: vector): real;
begin
 Z2:=(xx-x[i-1])/(x[i]-x[i-1])
end;

end;
```

Зміст