КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ

НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ

2008
КИЇВський ВПЦ УНІВЕРСИТЕТ

Рецензенти:

д-р фіз.-мат. наук, проф. В.І. Герасименко
д-р фіз.-мат. наук, проф. А.Г. Нікітін
канд. фіз.-мат. наук, доц. О.В. Капустян

Рекомендовано до друку вченою радою механіко-математичного факультету (протокол № 5 від 10 грудня 2007 року)

Диференціальні рівняння з частинними похідними. Навчально-методичні вказівки до практичних занять / Упорядник І.Б. Романенко. – К.: Видавничо-поліграфічний центр "Київський Університет", 2008. – 21 с.

Подано теми практичних занять та перелік задач для аудиторних занять і самостійної роботи студентів з курсу "Диференціальні рівняння з частинними похідними".

Для студентів механіко-математичного факультету.

Тема 1. Зведення крайових задач до варіаційних. Метод Рітца пошуку мінімізуючої послідовності

Основні поняття, формули та твердження, необхідні для розв'язування задач з теми

1. Область визначення оператора. Клас допустимих функцій.
2. Задача мінімізації.
3. Формула диференціювання частинами у багатовимірному випадку.

Задачі для аудиторної роботи

1. Довести, що у класі допустимих функцій $y \in C([0,1])$, $y(0)=0$, $y(1)=a$ функція вигляду $y = ax^n$ мінімізує функціонал
$$I(y) = \int_0^1 \left(\left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + \frac{n^2}{x^2} y^2 \right) x dx ,$$
де n - натуральне.
2. Довести, що якщо визначена на границі обмеженої двовимірної області Ω функція $\varphi(x,y)$ така, що клас допустимих функцій $u \in C(\overline{\Omega})$, $u\big|_{\partial\Omega} = \varphi$ не порожній, то у цьому класі задача Діріхле
$$\Delta u = 0 ,\ x \in \Omega ,\ u\big|_{\partial\Omega} = \varphi$$
еквівалентна до задачі мінімізації
$$I(u) = \int_\Omega \left(u_x^2 + u_y^2 \right) dxdy \to \min ,\ u\big|_{\partial\Omega} = \varphi .$$
3. За допомогою методу Рітца знайти мінімізуючу послідовність для задачі
$$y \in C^1([0,1]) ,\ y(0) = y(1) = 0 ,\ \int_0^1 y^2 dx = 1 ,$$
$$\int_0^1 \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx \to \min .$$

Задачі для самостійної роботи

1. Нехай $\Omega = [0, \pi]^2$, а клас допустимих функцій складається з функцій класу $C^2(\overline{\Omega})$, які обертаються в 0 на $\partial\Omega$. Довести, що функція $u = \dfrac{2}{\pi}\sin x \sin y$ у цьому класі мінімізує функціонал $I(u) = \dfrac{D(u)}{H(u)}$, де $D(u) = \iint\limits_{\Omega}(u_x^2 + u_y^2)dxdy$. $H(u) = \iint\limits_{\Omega} u^2 dxdy$, а також показати справедливість нерівності $H(u) \le \dfrac{1}{2}D(u)$.
2. Знайти перше наближення за методом Рітца для задачі на мінімальне значення функціонала $D(u) = \int\limits_0^1 \left(\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 + 2xy\right)dx$, $y(0) = y(1) = 0$, якщо базисні функції обрано у вигляді $y_n = x^n(x-1)$.
3. Звести задачу Діріхле $\Delta u = -1$, $(x, y) \in \Omega = (-1,1)^2$, $u(x, y) = 0$, $(x, y) \in \partial\Omega$ до задачі мінімізації та знайти перше наближення за методом Рітца, якщо перша координатна функція має вигляд $v_1(x, y) = (x^2 - 1)(y^2 - 1)$.
4. Звести задачу Діріхле $\Delta u = xy$, $(x, y) \in \Omega = (0,1)^2$, $u(x, y) = 0$, $(x, y) \in \partial\Omega$ до задачі мінімізації та знайти перше наближення за методом Рітца, якщо перша координатна функція має вигляд $v_1(x, y) = xy(x-1)(y-1)$.

Тема 2. Зведення еліптичної задачі до слабкої. Перехід від слабкої задачі до варіаційної

Основні поняття, формули та твердження, необхідні для розв'язування задач з теми

1. Постановка квазілінійної еліптичної крайової задачі для рівняння у дивергентному вигляді.
2. Формула диференціювання частинами у багатовимірному випадку. Формула Гауса-Остроградського.
3. Алгоритм переходу від еліптичної крайової задачі до слабкої задачі.
4. Побудова задачі мінімізації за слабкою задачею.
5. Умова Каратеодорі для коефіцієнтів квазілінійної еліптичної крайової задачі.
6. Умова рівномірної еліптичності.
7. Умова коерцитивності для еліптичної крайової задачі.
8. Теорема про достатні умови розв'язності слабкої задачі.

Задачі для аудиторної роботи

1. Для задачі $\Delta u - u^{1/3} = f(x),\ x \in \Omega$, $\left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = 0$ в області $\Omega = B_1(0) \subset R^2$, з областю визначення $u \in C^2(B_1(0)) \bigcap C^1(\overline{B_1(0)})$ здійсніть перехід до слабкої задачі. Дослідіть розв'язність слабкої задачі за допомогою теореми про достатні умови розв'язності. Зведіть слабку задачу до варіаційної.
2. Запишіть задачу побудови ітераційної послідовності для розв'язання слабкої задачі, що відповідає задачі 1, а також варіаційної задачі, що відповідає задачі 1.
3. Для задачі $\Delta u - u^{1/3} = f(x),\ x \in \Omega$, $\left.\left(\sigma u + \dfrac{\partial u}{\partial n}\right)\right|_{\partial\Omega} = \varphi$ в області $\Omega = B_1(0) \subset R^2$, з областю визначення

$u \in C^2(B_1(0)) \bigcap C^1(\overline{B_1(0)})$ здійсніть перехід до слабкої задачі. Дослідіть розв'язність слабкої задачі за допомогою теореми про достатні умови розв'язності. Зведіть слабку задачу до варіаційної.

Задачі для самостійної роботи

1. Розглянемо крайову задачу

$$-\operatorname{div}(p(x)\operatorname{grad} u) + q(x)u = f(x),\ x \in \Omega,$$

$$u\big|_{\partial\Omega} = \varphi(x),$$

де $p \in C^1(\overline{\Omega})$, $\min\limits_{x\in\Omega} p(x) = p_0 > 0$, $q \in C(\overline{\Omega})$, $q(x) \ge 0$, $x \in \Omega$, $f \in L_2(\Omega)$. Зведіть сформульовану задачу до слабкої задачі. Доведіть існування та єдиність розв'язку слабкої задачі.

2. Розглянемо крайову задачу

$$-\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(p_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + q(x)u = f(x),\ x \in \Omega,$$

$$u\big|_{\partial\Omega} = \varphi(x),$$

де $p_{ij} \in C^1(\overline{\Omega})$, $p_{ij} = p_{ji}$, $i, j = \overline{1, n}$, а також з деякою додатною сталою ν справедлива нерівність

$$\sum_{i,j=1}^{n} p_{ij}(x)\xi_i\xi_j \ge \nu\,|\,\xi\,|^2,\ x \in \Omega,\ \xi \in R^n,$$

а також $q \in C(\overline{\Omega})$, $q(x) \ge 0$, $x \in \Omega$, $f \in L_2(\Omega)$. Зведіть сформульовану задачу до слабкої задачі. Доведіть існування та єдиність розв'язку слабкої задачі.

Тема 3. Елементи теорії додатно визначених операторів

Задачі для аудиторної роботи

Нехай тут і далі H - гільбертів простір, $D(A) \subset H$ - область визначення оператора A, $A: D(A) \to H$.

Означення. Оператор A називається симетричним, якщо $D(A)$ щільна в H та $\forall u, v \in D(A)$ $(Au, v) = (u, Av)$.

Означення. Симетричний оператор A будемо називати додатно визначеним, якщо $\exists c > 0$ таке, що $\forall u \in D(A)$ $(Au, u) \geq c^2 \|u\|^2$.

1. Нехай $H = L_2(0,1)$, оператор $Au = -\dfrac{d^2u}{dx^2}$ має область визначення $D(A) = \left\{ u \in C^2([0,1]) : u(0) = u(1) = 0 \right\}$. Довести, що A – додатно визначений оператор.
2. Нехай A - додатно визначений оператор. Довести, що вираз вигляду $[u, v]_A = (Au, v)$, $u, v \in D(A)$ задовольняє на $D(A)$ аксіоми скалярного добутку.

Означення. $[u, v]_A = (Au, v)$ називають енергетичним скалярним добутком, що відповідає оператору A. Норма, вигляду $\|u\|_A = \sqrt{[u, u]_A} = \sqrt{(Au, u)}$, називається енергетичною нормою. Очевидно, що $\|u\|_A \geq c\|u\|$.

Означення. Замикання $D(A)$ у нормі $\| \ \|_A$ називають енергетичним простором оператора A і позначають H_A.

3. Нехай $H = L_2(0,1)$, оператор $Au = -\dfrac{d^2u}{dx^2}$ має область визначення $D(A) = \left\{ u \in C^2([0,1]) : u(0) = u(1) = 0 \right\}$. Довести, що енергетичний простір оператора A буде складатись із тих, і лише з тих функцій, які
   a. неперервні на $[0,1]$;

b. мають на $[0,1]$ узагальнену похідну, що буде елементом простору $L_2(0,1)$;

c. обертаються в 0 у точках 0 та 1.

4. Нехай Ω - однозв'язна обмежена область. Довести, що оператор $Au = -\Delta u$, з областю визначення $D(A) = C^2(\Omega) \bigcap C(\overline{\Omega})$, $u = 0$, $x \in \partial\Omega$, буде додатно визначеним у просторі $L_2(\Omega)$.

Задачі для самостійної роботи

1. Нехай $H = L_2(0,1)$, оператор $Au = -\dfrac{d}{dx}\left(p(x)\dfrac{du}{dx} \right)$, де $p \in C^1([0,1])$, $p(0) = 0$, $p(x) > 0$, $x > 0$ і інтеграл $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{p(x)}$ збігається. Область визначення $D(A)$ складається з функцій, які задовольняють вимоги

   a. $u(x)$ та $p(x)u'(x)$ неперервні на $[0,1]$ і для довільного $\delta > 0$ мають узагальнену похідну на $[\delta,1]$;

   b. $Au \in L_2(0,1)$;

   c. $u(0) = u(1) = 0$

   Довести, що A - додатно визначений в $L_2(0,1)$.

2. В умовах попередньої задачі довести, що енергетичний простір оператора A буде складатись із тих, і лише з тих функцій, які

   a. неперервні на $[0,1]$;

   b. мають на $[0,1]$ узагальнену похідну $\dfrac{du}{dx} = \dfrac{w}{\sqrt{p}}$, де $w \in L_2(0,1)$, і $u = \int\limits_0^x \dfrac{w(s)}{\sqrt{p(s)}} ds$;

   c. обертаються в 0 у точках 0 та 1.

Тема 4. Додатно визначені оператори та еліптичні задачі

Основні поняття, формули та твердження, необхідні для розв'язування задач з теми

1. Простір Соболєва в обмеженій області.
2. Нерівність Фрідріхса.
3. Алгоритм побудови енергетичного простору.

Задачі для аудиторної роботи

1. Нехай Ω - обмежена область у просторі R^n з кусково-гладкою границею $\partial\Omega$.
   Розглянемо крайову задачу
   $$-\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{i,j}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)+c(x)u=f(x),\ x\in\Omega,$$
   $$u\big|_{\partial\Omega}=0.$$
   Нехай $a_{ij}\in C^1(\overline{\Omega})$, $c\in C(\overline{\Omega})$, $a_{ij}(x)=a_{ji}(x)$, $i,j=\overline{1,n}$, $c(x)\geq 0$, а також існують додатні сталі C_1, C_2, такі, що для всіх $x\in\Omega$, для усіх $\xi\in R^n$ буде справедливою нерівність
   $$C_1|\xi|^2\leq\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\xi_i\xi_j\leq C_2|\xi|^2.$$
   Довести, що вказаній задачі можна співставити лінійний оператор, який відповідає лівій частині рівняння з областю визначення $C^2(\overline{\Omega})\bigcap\{u:u\big|_{\partial\Omega}=0\}$. Довести, що цей оператор буде додатно визначеним у $L_2(\Omega)$.
2. Записати енергетичний добуток та енергетичну норму оператора з попередньої задачі. Довести, що на множині визначення оператора його норма еквівалентна до норми простору $W_2^{(1)}(\Omega)$.
3. Довести, що енергетичний простір оператора з попередньої задачі складається з функцій, які

a. інтегровані у квадраті в Ω, а також мають усі узагальнені похідні першого порядку, які теж інтегровані у квадраті в Ω;
b. мають слід, рівний 0, на $\partial\Omega$.

<u>Означення.</u> Нехай A - додатно визначений оператор. Тоді функціонал $F_A(u) = \|u\|_A^2 - 2(f,u)$ називається енергетичним функціоналом, який відповідає оператору A. Доведено, що задача мінімізації $F_A(u) \to \min$, $u \in H_A$ завжди має єдиний розв'язок на енергетичному просторі H_A. Цей розв'язок називається слабким розв'язком задачі $Au = f$, $u \in D(A)$.

4. Записати енергетичний функціонал, що відповідає задачі з прикладу 1.

Задачі для самостійної роботи

1. Для задачі
$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = f(x,y),\ (x,y) \in \Omega,\ u\big|_{\partial\Omega} = D^1 u\big|_{\partial\Omega} = 0,$$
записати відповідний їй оператор, довести, що цей оператор буде додатно визначеним. Описати енергетичний простір оператора, записати енергетичний функціонал.

2. Нехай $\Omega = \bigotimes_{i=1}^{n}(0,a_i)$. Для задачі $-\Delta u = f(x)$, $x \in \Omega$, $u\big|_{\partial\Omega} = 0$ записати енергетичний оператор та енергетичний функціонал. Взявши базис енергетичного простору, що складається з функцій вигляду $u_\alpha(x) = \prod_{k=1}^{n} \sin\frac{\pi\alpha_k x}{a_k}$, де $\alpha_k \in N$, та розглядаючи наближення $u_N(x) = \sum_{|\alpha| \le k} c_\alpha u_\alpha(x)$, знайти послідовність, що збігається до слабкого розв'язку операторної задачі, та записати формулу слабкого розв'язку.

Тема 5. Принцип порівняння та принцип максимуму для квазілінійних еліптичних рівнянь

Основні поняття, формули та твердження, необхідні для розв'язування задач з теми

1. Дивергентний вигляд оператора.
2. Еліптичні та рівномірно еліптичні оператори, ознаки.
3. Теорема про порівняння для квазілінійних еліптичних крайових задач для рівнянь другого порядку.
4. Принцип максимуму для квазілінійних еліптичних крайових задач для рівнянь другого порядку.

Задачі для аудиторної роботи

1. Чи буде оператор
$$Lu=(\alpha+u^2)u_{xx}+e^u u_{yy}+2u(u_x)^2+e^u(u_y)^2$$
дивергентним? Чи буде цей оператор при певних α еліптичним, рівномірно еліптичним в R^2? Для яких α? Обґрунтуйте відповідь.
2. Для яких α оператор
$$Lu=u_{x_1x_1}+u_{x_2x_2}+(\alpha-2)\sum_{i,j=1}^{2}\frac{u_{x_ix_j}}{1+|\nabla u|^2}$$
буде еліптичним, рівномірно еліптичним в R^2? Обґрунтуйте.
3. Доведіть таке твердження: Нехай $Lu=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x,u,\nabla u)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}-cu$, де $c>0$ — стала, оператор рівномірно еліптичний. Нехай функція $u\in C^2(\Omega)\bigcap C(\overline{\Omega})$ і $Lu\geq 0$, а на границі області функція u не додатна. Тоді u не може досягати додатного максимуму усередині області Ω.
4. Нехай функція u - розв'язок квазілінійної задачі $(1+\sin^2 u)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,(x,y)\in\Omega$, $\quad u\big|_{\partial\Omega}=1$ в

обмеженій однозв'язній області Ω. Чи буде функція u обмеженою в Ω згори? Чому?

5. Чи може розв'язок задачі $(1+u^2)\Delta u + u = 0$, $x^2+y^2<1$, $u(x,y)=\sin x$, $x^2+y^2=1$ досягати в області $x^2+y^2<1$ значення 11? Обґрунтуйте.

Задачі для самостійної роботи

1. Чи буде оператор
$$Lu = e^{\frac{\partial u}{\partial y}} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \sin\left(u + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$$
оператором у дивергентній формі? Чому?

2. Чи буде правильним таке твердження (якщо твердження правильне, доведіть, якщо ні — наведіть контрприклад): Нехай функції $u, v \in C^2(\Omega)\bigcap C(\overline{\Omega})$, а оператор $Lu = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,u,\nabla u)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + b(x,u,\nabla u)$. Нехай в області Ω виконана рівність $Lu = Lv$, на $\partial\Omega$ $u = v$, а для оператора L виконані умови 1) — 4) теореми про порівняння. Тоді в Ω $u = v$.

3. Чи буде правильним таке твердження: Нехай функція $u \in C^2(\Omega)\bigcap C(\overline{\Omega})$. Нехай
$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,u,\nabla u)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + b(x,u,\nabla u)$$
і для оператора L виконані умови теореми про порівняння. Тоді розв'язок задачі Діріхле $Lu = f$, $x \in \Omega$, $u\big|_{\partial\Omega} = \varphi$ буде єдиним. Обґрунтуйте відповідь.

Тема 6. Степінь скінченновимірного відображення. Умова $(S)_+$ та степінь нескінченновимірного відображення

Основні поняття, формули та твердження, необхідні для розв'язування задач з теми

1. Степінь скінченновимірного відображення.
2. Властивості введення степеня скінченновимірного відображення.
3. Способи обчислення степеня скінченновимірного відображення.
4. Теорема про зв'язок степеня скінченновимірного відображення з розв'язністю скінченної системи нелінійних рівнянь.
5. Сильна та слабка збіжність.
6. Компактні оператори. Означення, властивості, достатні умови компактності.
7. Властивість $(S)_+$ для нескінченновимірних відображень.
8. Теорема про достатні умови введення степеня нескінченновимірного відображення.
9. Лема про гострий кут для нескінченновимірного відображення.
10. Теорема про зв'язок степеня нескінченновимірного відображення з розв'язністю операторного рівняння.

Задачі для аудиторної роботи

1. Ω - область в R^n. Нехай $y_0 \in R^n$ і має сенс $\deg(f, \overline{\Omega}, y_0)$. Довести, що тоді існує таке $\varepsilon > 0$, що для довільного y з околу $B_\varepsilon(y_0)$ існує $\deg(f, \overline{\Omega}, y_0)$ і $\deg(f, \overline{\Omega}, y) = \deg(f, \overline{\Omega}, y_0)$.
2. Ω - область в R^n. Нехай $\varphi : \Omega \to R^n$ - таке відображення, для якого можна запровадити степінь

$\deg(\varphi,\overline{\Omega},0)$. Нехай для довільного додатного λ і для довільного $x\in\partial\Omega$ $\varphi(x)+\lambda x\neq 0$. Нехай $0\in\Omega$. Довести, що тоді рівняння $\varphi(x)=0$ має в Ω розв'язок.

3. Ω - опукла область в R^n, $0\in\Omega$. Нехай $\varphi:\Omega\to R^n$ - таке відображення, що $\varphi\in C(\overline{\Omega})$ і $\varphi(\partial\Omega)\subset\Omega$. Тоді існує таке x_* з Ω, що $\varphi(x_*)=x_*$.
4. Довести, що тотожний оператор у гільбертовому просторі задовольняє умову $(S)_+$.
5. Нехай оператор A задовольняє умову $(S)_+$. Чи буде задовольняти цю умову оператор $-A$.
6. Чи задовольняє умову $(S)_+$ сталий оператор у гільбертовому просторі?
7. Нехай A - компактний неперервний оператор у гільбертовому просторі. Довести, що оператор $I-A$ задовольняє умову $(S)_+$.
8. Нехай Ω - область у гільбертовому просторі, A — компактний оператор. Нехай на границі $\partial\Omega$ області Ω $(Ax,x)<\|x\|^2$, а також $0\in\Omega$. Довести, що тоді $Deg(I-A,\overline{\Omega},0)=1$.
9. Нехай Ω - область у гільбертовому просторі, $0\in\Omega$. Нехай визначений на $\overline{\Omega}$ компактний неперервний оператор A не має в $\overline{\Omega}$ власних векторів, які б відповідали дійсним власним значенням, більшим або рівним 1. Довести, що тоді $Deg(I-A,\overline{\Omega},0)=1$.
10. Нехай $K\in C([0,1]^2)$, $f\in C([0,1]\times R)$, $\|f\|_C\leq M$. Довести, що оператор

$Ku=\int\limits_0^1 K(x,\xi)f(\xi,u(\xi))d\xi$ компактний з $L_2(0,1)$ в $L_2(0,1)$.

11. В умовах попередньої задачі довести, що відображення K має нерухому точку, тобто існує така функція u з $L_2(0,1)$, що $u = \int_0^1 K(x,\xi) f(\xi, u(\xi)) d\xi$.

Задачі для самостійної роботи

1. Нехай $\varphi : R^n \to R^n$ - таке неперервне відображення, що $\dfrac{(\varphi(x), x)}{|x|} \to \infty$ при $x \to \infty$. Довести, що тоді для довільного y з R^n рівняння $\varphi(x) = y$ має розв'язок.
2. Нехай Ω - обмежена область в R^2, а границю області Ω можна визначити за допомогою параметризації $(x, y) = (x(t), y(t))$, $t \in [0,1]$, $(x(0), y(0)) = (x(1), y(1))$, причому при зростанні параметру рух границею відбувається у напрямку «проти годинникової стрілки». Нехай $\varphi : \overline{\Omega} \to R^2$ - таке відображення, для якого в області Ω можна коректно визначити степінь. Візьмемо довільний напрямок $l \in R^2$ і розглянемо величину $\theta(t)$ - кут між $\varphi(x(t), y(t))$ та напрямком l у точці границі $(x(t), y(t))$. Для функції $\theta(t)$ можна зафіксувати однозначну неперервну гілку. Тоді для степеня відображення φ в області Ω справедлива формула
$$\deg(\varphi, \overline{\Omega}, 0) = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\partial\Omega} \theta = \frac{1}{2\pi} (\theta(1) - \theta(0)).$$
Якщо $\varphi(x(t), y(t)) = (p(t), q(t))$ і $p, q \in C^1([0,1])$, то справедлива формула
$$\deg(\varphi, \overline{\Omega}, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \frac{p(t)q'(t) - p'(t)q(t)}{p^2(t) + q^2(t)} dt.$$
Користуючись наведеними фактами, обчислити степінь відображення (x^3, y^3) на множині $x^2 + y^2 < 1$.

3. Ω - область в R^n. Нехай $\varphi:\Omega\to R^n$ - неперервне відображення, а $x_0\in\Omega$ - таке, що $\varphi(x_0)=0$, $\varphi(x)\neq 0$, $0<|x-x_0|<\varepsilon$ (x_0 — ізольована критична точка відображення φ). Довести, що тоді для $r<\varepsilon$ вираз $\deg(\varphi,\overline{B_r(x_0)},0)$ не залежить від r.

   Надалі будемо позначати $ind(\varphi,x_0)=\lim\limits_{r\to 0}\deg(\varphi,\overline{B_r(x_0)},0)$ - індекс критичної точки x_0 для відображення φ.

4. Ω - обмежена область в R^n. Нехай $\varphi:\Omega\to R^n$ - неперервне відображення, яке має в області Ω скінченну кількість критичних точок x_1, x_2, … x_I і не обертається в нуль на жодній точці границі $\partial\Omega$. Довести, що справедлива формула

$$\deg(\varphi,\overline{\Omega},0)=\sum_{i=0}^{I} ind(\varphi,x_i).$$

5. Нехай $\varphi\in C(R^n,R^n)$ і існує таке $R>0$, до для всіх x, таких, що $|x|>R$, $\varphi(x)\neq 0$. Довести, що для $r>R$ степінь $\deg(\varphi,\overline{B_r(0)},0)$ не залежить від r.

   Надалі будемо позначати $ind(\varphi,\infty)=\lim\limits_{r\to\infty}\deg(\varphi,\overline{B_r(0)},0)$ - індекс критичної точки ∞ для відображення φ.

6. Нехай $\varphi\in C(R^n,R^n)$ і має лише скінченну кількість критичних точок x_1, x_2, … x_I. Довести, що тоді

$$ind(\varphi,\infty)=\sum_{i=0}^{I} ind(\varphi,x_i).$$

7. Нехай оператор A діє з l_2 в l_2. Чи буде оператор A задовольняти на l_2 умову $(S)_+$.

   a. $Ax=(0,x_1,x_2,\ldots)$;

   b. $Ax=(x_1,-x_2,x_3,-x_4,\ldots)$;

c. $Ax = \left(x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \ldots \right)$;

d. $Ax = \left(x_1, \frac{1}{2}x_2, x_3, \frac{1}{2}x_4, \ldots \right)$;

e. $Ax = (x_2, x_1, x_4, x_3, \ldots)$;

f. $Ax = (x_1, x_1 - x_2, x_2 - x_3, \ldots)$.

12. Довести твердження в задачах 2-5 у випадку нескінченновимірного неперервного відображення з банахового простору у спряжений до цього простору, яке задовольняє умову $(S)_+$.

Тема 7. Дослідження нелінійних параболічних крайових задач за допомогою топологічних методів

Основні поняття, формули та твердження, необхідні для розв'язування задач з теми

1. Постановка загальної нелінійної параболічної крайової задачі.
2. Методика зведення загальної нелінійної параболічної крайової задачі до операторного рівняння.
3. Теорема про властивості оператора, до якого зводиться нелінійна параболічна крайова задача.
4. Теорема про єдиність розв'язку нелінійної параболічної крайової задачі. Теорема про локальне існування розв'язку.
5. Теорема про існування розв'язку нелінійної параболічної крайової задачі у термінах однопараметричного сімейства крайових задач.
6. Методика побудови гальоркінських наближень розв'язку нелінійної параболічної крайової задачі. Теорема про збіжність послідовності гальоркінських наближень розв'язку.

Задачі для аудиторної роботи

1. Нехай $\Omega = B_1(0) \subset R^2$, $Q_T = \Omega \times (0,T)$, $S_T = \partial\Omega \times (0,T)$. Розглянути задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u - \sin u = f(x,t),\ (x,t) \in Q_T,$$
$$u = g(x,t),\ (x,t) \in S_T,$$
$$u(x,0) = h(x),\ x \in \Omega.$$

   a. Записати для сформульованої задачі усі потрібні умови згідно з постановкою загальної нелінійної параболічної крайової задачі.
   b. Виконати перехід від сформульованої задачі до задачі з однорідними початковими даними.
   c. Записати оператор, що відповідає нелінійній параболічній крайовій задачі з однорідними початковими даними.
   d. За допомогою розгляду однопараметричного сімейства параболічних задач

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u - \tau \sin u = \tau \tilde{f}(x,t),\ (x,t) \in Q_T,$$
$$u = \tau \tilde{g}(x,t),\ (x,t) \in S_T,$$
$$u \in W_p^{(4,2),0}(Q_T)$$

   довести, що задача з однорідними початковими даними буде мати розв’язок.
   e. Записати систему, за допомогою якої можна знайти гальоркінські наближення розв’язку нелінійної параболічної крайової задачі з однорідними початковими даними.

Тема 8. Метод Кондратьєва дослідження крайових задач з конічною точкою

Основні поняття, формули та твердження, необхідні для розв'язування задач з теми

1. Простори з вагою.
2. Основні етапи застосування методу Кондратьєва.
3. Теорема Кондратьєва про розв'язність задачі з конічною точкою у нескінченному конусі.

Задачі для аудиторної роботи

1. Застосувати метод Кондратьєва до дослідження двовимірної еліптичної задачі

$$\Delta u = f(x),\ 0 < \arg(x_1, x_2) < \alpha < 2\pi ,$$

$$u\big|_{\arg(x_1, x_2)=0} = g_0(r),$$

$$u\big|_{\arg(x_1, x_2)=\alpha} = g_\alpha(r),$$

де $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

Список літератури

1. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1981. – 512 с.
2. Гончаренко В.М. Основи теорії рівнянь з частинними похідними. – К.: Вища школа, 1995. – 350 с.
3. Гончаренко В.М. Нелинейные задачи для уравнений с частными производными. – Черновцы: Рута, 2000. – 200 с.
4. Ниренберг Л. Лекции по нелинейному функциональному анализу. / Математика. Новое в зарубежной науке. Т.5. – М.: Мир, 1977. – 232 с
5. Скрыпник И.В. Методы исследования нелинейных эллиптических граничных задач. – М.: Наука, 1990. – 448 с.
6. Кондратьев В.А. Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими у угловыми точками // Труды Московского математического общества.— 1967.— Т.16.—С. 209–292

Зміст