КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

КОНТРОЛЬНІ ЗАВДАННЯ
З КУРСУ “РІВНЯННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ”

для студентів механіко-математичного-факультету
заочної форми навчання

Український фітосоціологічний центр

Київ – 2002

ББК в19
В11

Рецензенти:
доктор фізико-математичних наук **Бєлов Ю.А.**
кандидат фізико-математичних наук **Гординський Л.Д**.

Затверджено Вченою Радою
механіко-математичного факультету
Київського національного університету
імені Тараса Шевченка
Протокол № 10 від 14 травня 2002 року

В11 Контрольні завдання з курсу "Рівняння математичної фізики" для студентів механіко-математичного факультету заочної форми навчання /Упорядн. Є.С.Вакал, Г.В.Верьовкіна, В.В.Личман, А.В.Ловейкін, В.В.Попов. – К.: Фітосоціоцентр, 2002. – 29 с.

ISBN 966-306-004-2

Методична розробка містить варіанти контрольних завдань, що охоплюють нормативний курс "Рівняння математичної фізики" і пропонуються студентам, які навчаються заочно, з метою самостійного оволодіння ними основними методами розв'язання задач математичної фізики.

ББК в19

ISBN 966-306-004-2

Пропоновані завдання містять перелік контрольних робіт з курсу "Рівняння математичної фізики", що читається студентам механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка заочної форми навчання.

Контрольні завдання розміщені за темами, зміст яких визначається програмою курсу. Кожна робота складається із завдань, порядок виконання яких визначається викладачем. При потребі студенту надається консультаційна допомога.

Перед виконанням контрольних завдань студенти повинні ознайомитися з відповідним теоретичним матеріалом і методами розв'язання задач математичної фізики, опрацювати самостійно вказані розділи з рекомендованих підручників.

Завдання оформлюються в окремому зошиті. Контрольна робота вважається зарахованою після бесіди викладача із студентом під час консультативних або практичних занять.

Для вивчення теорії, що використовується для виконання відповідної контрольної роботи, студентам пропонуються наступні розділи підручників [1], [2], [8] – [14], [16]:

Контрольна робота №1 – [8], с.55-58; [9], с.29-32; [12], с.18-22; [13], с.47-48; [14], с.39-44; [16], с.18-22;

Контрольна робота №2 – [1], с.282-284; [2], с.9-17; [8], с.61-68; [9], с.32-40; [10], с.18-23; [11], с.355-371; [12], с.7-18; [13], с.48-53; [14], с.44-48; [16], с.11-18.

Контрольна робота №3 – [1], с.24-32, 202-209, 226-230; [2], с.17-28, 32-36; [8], с.43-51; [9], с.12-15, 24-29; [10], с.6-17; [11], с.185-214; [12], с.26-29, 165-171; [13], с.8-29; [14], с.11-27; [16], с.23-44, 180-194, 276-279.

Контрольна робота №4 – [1], с.33-51; [2], с.38-49; [8], с.237-240; [9], с.54-59; [11], с.371-380;[12], с.32-51, [13], с.245-255; [14], с.52-55.

Контрольна робота №5 – [1], с.51-55; [2], с.53-55; [8], с.240-242; [12], с.99-109.

Контрольна робота №6 – [1], с.55-90, 120-130; [8], с.468-473; [9], с.119-147, 210-214; [11], с.219-257; [12], с.112-126, 146-156; [13], с.406-413, 422-427.

Контрольна робота №7 – [1], с.173-196; [8], с.473-474; [9], с.463-473, 485-487; [11], с.257-260; [12], с.179-183; [13], с.413-416.

Контрольна робота №8 – [1], с.139-144, 214-216; [8], с.478-479; [9], с.214-219, 473-481; [11], с.271-288; [12], с.299-308; [13], с.504-508.

Контрольна робота №9 – [1], с.267-281; [2], с.329-338; [9], с.328-341; [11], с.136-146, 289-301; [12], с.219-225; [13], с.417-422, 509-524; [16], с.671-703.

Контрольна робота №10 – [1], с.230-261; [2], с.133-145; [9], с.277-281; [10], с.82-90; [11], с.333-355; [12], с. 240-244; [13], с.76-97; [16], с.287-293, 318-329.

При підготовці методичної розробки використані вправи підручників [3] – [7], [15], а також задачі, що пропонувалися авторами на практичних заняттях з курсу "Рівняння математичної фізики" на механіко-математичному факультеті.

Контрольна робота №1

Тема: *класифікація і зведення до канонічного вигляду диференціальних рівнянь в частинних похідних другого порядку з багатьма незалежними змінними*

Завдання: звести до канонічного вигляду запропоновані рівняння:

1. $u_{xx} + 2u_{xy} - 2u_{xz} + 2u_{yy} + 2u_{zz} = 0.$
2. $4u_{xx} - 4u_{xy} - 2u_{yz} + u_y + u_z = 0.$
3. $u_{xy} - u_{xz} + u_x + u_y - u_z = 0.$
4. $u_{xy} - u_{xt} + u_{zz} - 2u_{zt} + 2u_{tt} = 0.$
5. $u_{xx} + 2u_{xy} - 2u_{xz} + 2u_{yy} + 2u_{zz} = 0.$
6. $u_{xx} + 2u_{xy} - 4u_{xz} - 6u_{yz} - u_{zz} = 0.$
7. $u_{xy} + u_{xz} + u_{xt} + u_{zt} = 0.$
8. $u_{xx} + 2u_{yy} + 2u_{xy} + 4u_{yz} + 5u_{zz} + u_x + 2u_y = 0.$
9. $u_{xx} + 2u_{xy} + 2u_{yy} + 2u_{yz} + 2u_{yt} + 2u_{zz} + 3u_{tt} = 0.$
10. $u_{xx} - 4u_{xy} + 2u_{xz} + 4u_{yy} + u_{zz} = 0.$
11. $u_{xx} + 2u_{xy} - 2u_{xz} - 4u_{yz} + 2u_{yt} + u_{zz} = 0.$
12. $u_{xx} + 2u_{xz} - 2u_{xt} + u_{yy} + 2u_{yz} + 2u_{yt} + 2u_{zz} + 2u_{tt} = 0.$
13. $u_{xy} + u_{xz} + u_{yz} - u_x + u_y = 0.$
14. $3u_{yy} - 2u_{xy} - 2u_{yz} + 4u = 0.$
15. $u_{xx} + 4u_{yy} + u_{zz} + 4u_{xy} + 2u_{xz} + 4u_{yz} + 2u = 0.$
16. $u_{xx} + 4u_{yy} + 9u_{zz} + 4u_{xy} + 6u_{xz} + 12u_{yz} - 2u_x - 4u_y - 6u_z = 0.$
17. $u_{xx} + 2u_{xz} - 2u_{xt} + u_{yy} + 2u_{yz} + 2u_{yt} + 2u_{zz} + 2u_{tt} = 0.$
18. $u_{xx} + 2u_{xy} + 2u_{yy} + 4u_{yz} + 5u_{zz} + u_x + u_y = 0.$
19. $u_{xx} + u_{tt} + u_{yy} + u_{zz} - 2u_{tx} + u_{xz} + u_{ty} - 2u_{yz} = 0.$
20. $u_{xy} + u_{xz} - u_{tx} - u_{yz} + u_{tv} + u_{tz} = 0.$
21. $u_{xx} + 2u_{yy} - u_{xz} + u_x - u_z = 0.$
22. $u_{zz} + u_{xz} - u_{yz} + u_y - u_x = 0.$
23. $u_{yy} - 3u_{xy} + u_{yz} - u_z + u_y = 0.$
24. $u_{xx} + 9u_{xy} - 3u_{yz} = 5u_x.$
25. $2u_{yy} - u_{yz} + u_{xy} - 5u_z = u.$
26. $2u_{xy} + u_{yz} - 3u_y + u = 0.$
27. $u_{xz} - 2u_{xy} + u_{yz} + 5u_x = 0.$
28. $\sum_{k=1}^{n} k u_{x_k x_k} + 2\sum_{l<k} l u_{x_l x_k} = 0.$
29. $u_{x_1 x_1} - 2\sum_{k=2}^{n} (-1)^k u_{x_{k-1} x_k} = 0.$
30. $u_{x_1 x_1} + 2\sum_{k=2}^{n} u_{x_k x_k} - 2\sum_{k=1}^{n-1} u_{x_k x_{k+1}} = 0.$

Контрольна робота №2

Тема: *класифікація і зведення до канонічного вигляду диференціальних рівнянь в частинних похідних другого порядку з двома незалежними змінними*

Завдання: звести рівняння до канонічного вигляду в кожній з областей, де зберігається його тип:

1. $u_{xx} + xu_{yy} = 0.$
2. $u_{xx} + yu_{yy} = 0.$
3. $u_{xx} - xu_{yy} = 0.$
4. $xu_{xx} + yu_{yy} = 0.$
5. $yu_{xx} + xu_{yy} = 0.$
6. $u_{xx} + xyu_{yy} = 0.$
7. $xyu_{xx} + u_{yy} = 0.$
8. $y^2u_{xx} + 2xyu_{xy} + x^2u_{yy} = 0.$
9. $x^2u_{xx} + 2xyu_{xy} + y^2u_{yy} = 0.$
10. $y^2u_{xx} + 2xyu_{xy} + 2x^2u_{yy} + yu_y = 0.$
11. $y^2u_{xx} - 4xyu_{xy} + 4x^2u_{yy} + 3u_x = 0.$
12. $u_{xx} + yu_{yy} + 0{,}5\, u_y = 0.$
13. $u_{xx} - 2xu_{xy} + x^2u_{yy} - 2u_y = 0.$
14. $y^2u_{xx} - e^{2x} u_{yy} = 0.$
15. $x^2u_{xx} + e^{2y} u_{yy} = 0.$
16. $y^2u_{xx} - 2ye^x u_{xy} + e^{2x} u_{yy} = 0.$
17. $xu_{xx} - 2\sqrt{xy}\, u_{xy} + yu_{yy} + 0{,}5\, u_y = 0,\ x,y > 0.$
18. $4y^2u_{xx} - e^{2x} u_{yy} - 4y^2u_x = 0.$
19. $u_{xx} - 2\sin x u_{xy} + (2 - \cos^2 x)u_{yy} = 0.$
20. $u_{xx} + 2\sin y\, u_{xy} + (1+\sin^2 y)u_{yy} = 0.$
21. $u_{xx} - 2\cos x\, u_{xy} - (3 + \sin^2 x)\, u_{yy} - yu_y = 0.$
22. $u_{xx} + 2u_{xy} + \cos^2 x\, u_{yy} - ctgx(u_x + u_y) = 0.$
23. $\sin^2 x\, u_{xx} - 2y\sin x\, u_{xy} + y^2u_{yy} = 0.$
24. $u_{xx} + 2\cos x\, u_{xy} - \sin^2 x\, u_{xx} - \sin x u_y = 0.$
25. $(1 + x^2)u_{xx} + (1 + y^2)u_{yy} + xu_x + yu_y - 2u = 0.$
26. $yu_{xx} - xu_{yy} + xu_y + yu_x = 0.$
27. $y^2u_{xx} - x^2u_{yy} = 0.$
28. $x^2u_{xx} - y^2u_{yy} = 0.$
29. $x^2u_{xx} + y^2u_{yy} = 0.$
30. $y^2u_{xx} + x^2u_{yy} = 0.$

Контрольна робота №3

Тема: *постановка задач математичної фізики*

Завдання: здійснити постановку крайової задачі:

1. Поставити крайову задачу для визначення відхилень точок струни $0 \le x \le l$ від стану рівноваги, якщо до кінців струни $x=0$ і $x=l$, починаючи з моменту $t=0$, прикладені поперечні сили $F(t)$ і $\Phi(t)$ відповідно, а на саму струну діє поперечна сила $R(x,t)$.
2. Поставити крайову задачу для визначення відхилень точок струни $0 \le x \le l$ від стану рівноваги, якщо кінець струни $x=0$ вільний, кінець $x=l$ закріплений пружно, в точці струни x_0 $(0<x_0<l)$, починаючи з моменту $t=0$, діє поперечна сила $F(t)$.
3. Нехай в точці $x=0$ нескінченної однорідної струни знаходиться кулька маси m_0. Початкові швидкості і початкові відхилення точок струни дорівнюють нулю. Сформулювати задачу для визначення відхилень точок струни від стану рівноваги, якщо, починаючи з моменту $t=0$, на кульку діє сила F_0.
4. Поставити задачу про поперечні коливання нескінченної струни під дією сили $F(t)$, яка прикладена в точці $x=x_0$, що рухається вздовж струни з швидкістю V. Сила прикладена з моменту $t=0$.
5. Поставити крайову задачу про поперечні коливання важкої струни, якщо вона обертається з кутовою швидкістю $\omega=const$ щодо вертикального положення рівноваги. Верхній кінець струни жорстко закріплений, а нижній – вільний. Початкові умови довільні.
6. Поставити крайову задачу про малі поперечні коливання струни в середовищі з опором, пропорційним швидкості, вважаючи, що кінці струни вільні.
7. Сформулювати задачу про повздовжні коливання однорідного пружного стрижня перерізу S довжиною l при довільних початкових відхиленнях і швидкостях, якщо до кінців стрижня $x=0$ і $x=l$, починаючи з моменту $t=0$, прикладені сили $F(t)$ і $\Phi(t)$ відповідно, які діють вздовж осі x.
8. Два напівобмежених пружних однорідних стрижня з однаковими (сталими) перерізами S з'єднані торцями і складають один необмежений стрижень. Нехай ρ_1 і E_1 – густина і модуль пружності першого з них, ρ_2 і E_2 – другого. Поставити крайову задачу для визначення відхилень перерізів необмеженого стрижня (при $t>0$) від їх стану рівноваги, якщо задані (при $t=0$) початкове відхилення $\varphi(x)$ і початкова швидкість $\psi(x)$. Розглянути випадок, коли торці стрижнів з'єднані так, що між ними знаходиться жорстка прокладка малої товщини масою m_0.
9. Сформулювати задачу про повздовжні коливання однорідного пружного стрижня перерізу S довжиною l при довільних початкових відхиленнях і швидкостях, якщо до вільних кінців стрижня $x=0$ і $x=l$ прикладено вантаж масою m_0 і m_1 відповідно.
10. Поставити крайову задачу про малі повздовжні коливання однорідного пружного стрижня, якщо один його кінець пружно закріплений, а до іншого прикладена сила, пропорційна швидкості (з коефіцієнтом γ).

11. Поставити крайову задачу про повздовжні коливання однорідного пружного стрижня, якщо його верхній кінець закріплено пружно, а до нижнього прикріплено вантаж Q, причому за стан рівноваги приймається ненапружений стан стрижня (наприклад, в початковий момент часу з під вантажу прибирається підставка, і вантаж починає розтягувати стрижень). Впливом сили тяжіння на частинки стрижня можна знехтувати.
12. Поставити крайову задачу про повздовжні коливання неоднорідного стрижня, складеного з двох однорідних стрижнів, з'єднаних в точці $x=c$ $(0<c<x)$, якщо один кінець вільний, а до другого, починаючи з моменту $t=0$, прикладена повздовжня сила $F(t)$ на одиницю площі перерізу.
13. Поставити крайову задачу про повздовжні коливання неоднорідного стрижня, складеного з двох однорідних стрижнів, з'єднаних в точці $x=c$ $(0<c<l)$, якщо один кінець закріплено пружно, а до другого, починаючи з моменту $t=0$, прикладена повздовжня сила $F(t)$ на одиницю площі перерізу.
14. Поставити крайову задачу про повздовжні коливання пружного однорідного стрижня змінного перерізу $S=S(x)$ $(0\leq x\leq l)$. Розглянути випадок конічного стрижня. Сформулювати початкові та крайові умови для випадку, коли стрижень закріплено пружно в точці $x=0$, а до вільного кінця $x=l$ прикладено вантаж M. Початкові умови довільні.
15. Поставити крайову задачу про повздовжні коливання пружного однорідного стрижня змінного перерізу $S=S(x)$ $(0\leq x\leq l)$, якщо стрижень має форму зрізаного конуса з радіусами основ r і R $(r<R)$. Основи конуса закріплені жорстко. Початкові умови довільні.
16. Поставити крайову задачу про визначення температури однорідного стрижня $0\leq x\leq l$ з теплоізольованою бічною поверхнею, якщо його початкова температура є заданою функцією x; розглянути випадок, коли на кінцях стрижня $x=0$ і $x=l$, починаючи з моменту $t=0$, підтримуються теплові потоки $q(t)$ і $Q(t)$ відповідно.
17. На бічній поверхні однорідного тонкого стрижня $0\leq x\leq l$ за законом Ньютона відбувається конвективний теплообмін з середовищем, температура якого u_0. Поставити крайову задачу про визначення температури стрижня, якщо його початкова температура є заданою функцією x; розглянути випадок, коли його кінець $x=0$, починаючи з моменту $t=0$, підтримується при заданій температурі, а кінець $x=l$ теплоізольований.
18. Поставити крайову задачу про охолодження тонкого кільця, на поверхні якого відбувається конвективний теплообмін за законом Ньютона з навколишнім середовищем, що має задану температуру. Нерівномірністю розподілу температури по товщині кільця знехтувати.
19. Однорідна куля радіуса R з центром в початку координат нагріта до температури T. Поставити крайову задачу про охолодження кулі для випадку, коли в кожній точці кулі внаслідок хімічної реакції поглинається кількість тепла, пропорційна температурі в цій точці, а поверхня кулі теплоізольована.

20. Однорідна куля радіуса R з центром в початку координат нагріта до температури T. Поставити крайову задачу про розподіл температури в кулі, якщо в ній діють теплові джерела сталої потужності Q, а на поверхні відбувається конвективний теплообмін за законом Ньютона з середовищем нульової температури.
21. Поставити крайову задачу про визначення температури однорідного стрижня $0 \le x \le l$ з теплоізольованою бічною поверхнею, якщо його початкова температура є заданою функцією x; розглянути випадок, коли на кінцях стрижня $x=0$ і $x=l$ відбувається конвективний теплообмін за законом Ньютона з середовищами, що примикають до цих кінців і мають температуру $u_0(t)$ і $u_1(t)$ відповідно.
22. Поставити крайову задачу про визначення температури однорідного стрижня $0 \le x \le l$ з теплоізольованою бічною поверхнею, якщо його початкова температура є заданою функцією x; розглянути випадок, коли кінець стрижня $x=0$ теплоізольований, а на кінці $x=l$ відбувається конвективний теплообмін за законом Ньютона з середовищем заданої температури.
23. Поставити крайову задачу про визначення температури однорідного стрижня $0 \le x \le l$ з теплоізольованою бічною поверхнею, якщо його початкова температура є заданою функцією x; розглянути випадок, коли на кінці стрижня $x=l$ зосереджена маса m з того ж матеріалу, що і стрижень, і цей кінець теплоізольований, а на кінці $x=0$, починаючи з моменту $t=0$ підтримується температура $\mu(t)$.
24. Поставити крайову задачу про визначення температури однорідного стрижня $0 \le x \le l$ з теплоізольованою бічною поверхнею, якщо його початкова температура є заданою функцією x; розглянути випадок, коли на кінцях стрижня зосереджені маси m з того ж матеріалу, що і стрижень, причому на кінці $x=l$, починаючи з моменту $t=0$, відбувається теплообмін з навколишнім середовищем температури u_0, а кінець $x=0$ теплоізольований.
25. Поставити крайову задачу про визначення температури однорідного стрижня $0 \le x \le l$ з теплоізольованою бічною поверхнею, якщо його початкова температура є заданою функцією x; розглянути випадок, коли на кінцях стрижня зосереджені маси m з того ж матеріалу, що і стрижень, причому кінець $x=0$ теплоізольований, а на кінці $x=l$, починаючи з моменту $t=0$, підтримується тепловий потік $q(t)$.
26. Поставити крайову задачу про нагрівання тонкого стрижня, по якому ковзає електропіч, яка щільно прилягає до нього, з постійною швидкістю V_0 і сталою потужністю Q (кількість тепла, що виділяється піччю в одиницю часу). Зовнішня поверхня електропечі, яка не прилягає до стрижня, є теплоізольованою, а теплоємність зневажено мала.
27. Необмежений циліндричний провідник радіуса R нагрівається з моменту $t=0$ постійним струмом, що виділяє в одиниці об'єму провідника тепло Q. Поставити крайову задачу про визначення температури провідника в припущенні, що на його поверхні відбувається конвективний теплообмін з середовищем нульової температури. Початкова температура провідника дорівнює нулю.

28. Однорідний стрижень $0 \le x \le l$ сталого перерізу S має початкову (при $t=0$) температуру $\varphi(x)$. На поверхні стрижня відбувається конвективний теплообмін за законом Ньютона з середовищем, що має температуру $v(t)$. Сформулювати задачу про визначення температури u при $t>0$ в цьому стрижні для випадку, коли в ньому діють теплові джерела з об'ємною густиною $F(x, t)$, кінець стрижня $x=0$ теплоізольований, кінець $x=l$ затиснуто в масивну клему із заданою теплоємністю C_0 і достатньо великою теплопровідністю.
29. В трубці довжиною l сталого перерізу S, однорідно заповненій пористою речовиною, відбувається дифузія газу з початковою (при $t=0$) концентрацією $\varphi(x)$. Поставити крайову задачу про визначення концентрації газу в трубці, вважаючи бічну поверхню газонепроникною, для випадку, коли на кінці $x=0$, починаючи з моменту $t=0$, підтримується потік газу $q(t)$, а на кінці $x=l$ відбувається газообмін із зовнішнім середовищем за законом, аналогічним закону Ньютона для конвективного теплообміну, причому концентрація газу в зовнішньому середовищі припускається нульовою.
30. Трубка довжиною l сталого перерізу S однорідно заповнена газом, початкова концентрація якого (при $t=0$) дорівнює $\varphi(x)$. Поверхня і торці трубки пористі, так що через них відбувається обмін концентрацією (за законом, аналогічним закону Ньютона для конвективного теплообміну) з навколишнім середовищем, концентрація газу в якому $v(t)$. Поставити крайову задачу про визначення концентрації газу u при $t>0$ в трубці, якщо частинки газу розпадаються, причому швидкість розпаду в кожній точці трубки (в одиницю часу в одиничному перерізі) пропорційна кореню квадратному з його концентрації (з коефіцієнтом швидкості розпаду γ).

Контрольна робота №4

Тема: *задача Коші для одновимірного хвильового рівняння (рівняння коливань)*

Завдання: розв'язати методом характеристик задачу Коші для одновимірного хвильового рівняння:

1. $u_{xx} - 6u_{xy} + 5u_{yy} = 0,$ $\quad u\big|_{y=x} = sinx, \quad u_y\big|_{y=x} = cosx.$
2. $3u_{xx} - 5u_{xy} + 2u_{yy} = 0,$ $\quad u\big|_{y=x} = x, \quad u_y\big|_{y=x} = 0.$
3. $u_{tt} = 9u_{xx} + 72x,$ $\quad u\big|_{t=0} = x^2, \quad u_t\big|_{t=0} = 3x^2.$
4. $u_{tt} = u_{xx},$ $\quad u\big|_{t=0} = \dfrac{sin\, x}{x}, \quad u_t\big|_{t=0} = 0.$
5. $u_{tt} = u_{xx},$ $\quad u\big|_{t=0} = e^{-x^2}, \quad u_t\big|_{t=0} = x^2.$
6. $u_{xy} = 0,$ $\quad u\big|_{y=x^2} = 0, \quad u_y\big|_{y=x^2} = \sqrt{x}, |x| < 1, 0 < y < 1.$
7. $u_{xy} + u_x = 0,$ $\quad u\big|_{x=y} = siny, \quad u_x\big|_{x=y} = 1.$
8. $u_{xx} - u_{yy} + 2u_x + 2u_y = 0,$ $\quad u\big|_{y=0} = x, \quad u_y\big|_{y=0} = 0.$
9. $u_{xx} - u_{yy} - 2u_x - 2u_y = 4,$ $\quad u\big|_{x=0} = -y, \quad u_x\big|_{x=0} = y - 1.$

10. $u_{xx}+2u_{xy}-3u_{yy}=2,$ $\qquad u\big|_{y=0}=0,\quad u_y\big|_{y=0}=x+cosx.$

11. $u_{tt}=u_{xx}+6x,$ $\qquad u\big|_{t=0}=x^2,\quad u_t\big|_{t=0}=4x.$

12. $u_{tt}=4u_{xx}+t,$ $\qquad u\big|_{t=0}=x^2,\quad u_t\big|_{t=0}=x.$

13. $u_{tt}=4u_{xx},$ $\qquad u\big|_{t=0}=0,\quad u_t\big|_{t=0}=x^2.$

14. $u_{tt}=u_{xx}+sin2x,$ $\qquad u\big|_{t=0}=sin2x,\quad u_t\big|_{t=0}=0.$

15. $u_{tt}=u_{xx}+sinx,$ $\qquad u\big|_{t=0}=sinx,\quad u_t\big|_{t=0}=0.$

16. $u_{tt}=u_{xx},$ $\qquad u\big|_{t=0}=e^{-x^2},\, u_t\big|_{t=0}=\dfrac{x}{1+x^2}.$

17. $u_{tt}=a^2u_{xx}+sin\omega t,$ $\qquad u\big|_{t=0}=0,\quad u_t\big|_{t=0}=0.$

18. $u_{tt}=a^2u_{xx}+sin\,\omega x,$ $\qquad u\big|_{t=0}=0,\quad u_t\big|_{t=0}=0.$

19. $u_{tt}=a^2u_{xx}+cos2at,$ $\qquad u\big|_{t=0}=0,\quad u_t\big|_{t=0}=0.$

20. $u_{tt}=9u_{xx}+sinx,$ $\qquad u\big|_{t=0}=1,\quad u_t\big|_{t=0}=1.$

21. $u_{tt}=u_{xx}+2,$ $\qquad u\big|_{t=0}=e^{-x^2},\quad u_t\big|_{t=0}=\dfrac{x}{1+x^2}.$

22. $u_{xy}=5,$ $\qquad u\big|_{y=x^2}=0,\, u_y\big|_{y=x^2}=\sqrt{x},\, |x|<1,\, 0<y<1.$

23. $u_{tt}=4u_{xx}+4xt,$ $\qquad u\big|_{t=0}=x^2,\quad u_t\big|_{t=0}=x.$

24. $u_{tt}=u_{xx}+xt,$ $\qquad u\big|_{t=0}=x^2,\quad u_t\big|_{t=0}=x.$

25. $u_{tt}=25u_{xx}+xt,$ $\qquad u\big|_{t=0}=0,\quad u_t\big|_{t=0}=0.$

26. $u_{tt}=u_{xx}+e^x,$ $\qquad u\big|_{t=0}=0,\quad u_t\big|_{t=0}=x+cosx.$

27. $u_{tt}=u_{xx}+e^x,$ $\qquad u\big|_{t=0}=sinx,\quad u_t\big|_{t=0}=x+cosx.$

28. $e^yu_{xy}-u_{yy}+u_y=xe^{2y},$ $\qquad u\big|_{y=0}=sinx,\quad u_y\big|_{y=0}=\dfrac{1}{1+x^2}.$

29. $e^yu_{xy}-u_{yy}+u_y=0,$ $\qquad u\big|_{y=0}=-\dfrac{x^2}{2},\quad u_y\big|_{y=0}=-sinx.$

30. $u_{xx}+2cosxu_{xy}-sin^2xu_{yy}-sinxu_y=0,$ $\quad u\big|_{y=sinx}=x+cosx,\quad u_y\big|_{y=sinx}=sinx.$

Контрольна робота №5

Тема: *застосування методу продовжень до розв'язання мішаних задач для одновимірного хвильового рівняння в півпросторі*

Завдання: використовуючи метод продовження та формулу Д'Аламбера, знайти розв'язок мішаної задачі:

1. $u_{tt}=a^2u_{xx},\, x>0,\, t>0,$ $\qquad u(0,t)=0, t>0, u(x,0)=\varphi(x), u_t(x,0)=\psi(x), x>0.$

2. $u_{tt}=a^2u_{xx},\, x>0,\, t>0,$ $\qquad u_x(0,t)=0, t>0, u(x,0)=\varphi(x), u_t(x,0)=\psi(x), x>0.$

3. $u_{tt}=a^2u_{xx},\, x>0,\, t>0,$ $\qquad u_x(0,t)=0, t>0, u(x,0)=0, u_t(x,0)=sin\,x, x>0.$

4. $u_{tt}=a^2u_{xx},\, x>0,\, t>0,$ $\quad u(0,t)=0, t>0, u(x,0)=\dfrac{x^2}{1+x^2}, u_t(x,0)=0, x>0.$

5. $u_{tt}=a^2u_{xx},\, x>0,\, t>0,$ $\quad u(0,t)=0, t>0, u(x,0)=0, u_t(x,0)=\dfrac{x}{1+x^2}, x>0.$

6. $u_{tt}=a^2u_{xx},\, x>0,\, t>0,$ $\quad u(0,t)=0, t>0, u(x,0)=\dfrac{x^2}{1+x^2}, u_t(x,0)=\dfrac{x}{1+x^2}, x>0.$

7. $u_{tt}=a^2u_{xx},\, x>0,\, t>0,$ $\quad u(0,t)=0, t>0, u(x,0)=e^{-x^2}, u_t(x,0)=sinx, x>0.$

8. $u_{tt}=a^2u_{xx},\, x>0,\, t>0,$ $\quad u(0,t)=0, t>0, u(x,0)=cosx, u_t(x,0)=x, x>0.$

9. $u_{tt}=a^2u_{xx},\, x>0,\, t>0,$ $\quad u_x(0,t)=0, t>0, u(x,0)=\dfrac{x^2}{1+x^2}, u_t(x,0)=\dfrac{x}{1+x^2}, x>0.$

10. $u_{tt}=a^2u_{xx},\, x>0,\, t>0,$ $\quad u_x(0,t)=0, t>0, u(x,0)=x, u_t(x,0)=sinx,\ x>0.$

11. $u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,t), x>0, t>0,$ $\quad u(0,t)=0,\ t>0,\ u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=0,\ x>0.$

12. $u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,t), x>0, t>0,$ $\quad u_x(0,t)=0,\ t>0,\ u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=0, x>0.$

13. $u_{tt}=4u_{xx},\, x>0,\, t>0,$ $\quad u(0,t)=5sin\omega t,\ t>0,\ u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=0,\ x>0.$

14. $u_{tt}=a^2u_{xx}+sinx,\, x>0,\, t>0,$ $\quad u(0,t)=0,\ t>0,\ u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=0, x>0.$

15. $u_{tt}=a^2u_{xx}+e^x,\, x>0,\, t>0,$ $\quad u_x(0,t)=0, t>0, u(x,0)=x^2, u_t(x,0)=x, x>0.$

16. $u_{tt}=a^2u_{xx}+xt,\, x>0,\, t>0,$ $\quad u(0,t)=0,\ t>0,\ u(x,0)=x,\ u_t(x,0)=0, x>0.$

17. $u_{tt}=a^2u_{xx}, x>0,\ t>0,$ $\quad u(0,t)=0,\ t>0,\ u(x,0)=x^2,\ u_t(x,0)=sin^2 x,\ x>0.$

18. $u_{tt}=a^2u_{xx}, x>0, t>0,$ $\quad u(0,t)=\mu(t),\ t>0,\ u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=0, x>0.$

19. $u_{tt}=a^2u_{xx}, x>0, t>0,$ $\quad u_x(0,t)=\nu(t),\ t>0,\ u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=0, x>0.$

20. $u_{tt}=a^2u_{xx},\, x>0,\ t>0,$ $\quad u_x(0,t)-hu(0,t)=\varsigma(t),\ t>0,\ u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=0,\ x>0.$

21. $u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,t),\, x>0,\ t>0,$ $\quad u(0,t)=\mu(t),\ t>0,\ u(x,0)=\varphi(x),\ u_t(x,0)=\psi(x),\ x>0.$

22. $u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,t),\, x>0,\ t>0,$ $\quad u_x(0,t)=\nu(t),\ t>0,\ u(x,0)=\varphi(x),\ u_t(x,0)=\psi(x),\ x>0.$

23. $u_{tt}=u_{xx}, x>0,\, t>0,$ $\quad u(0,t)=t^2,\ t>0,\ u(x,0)=x^2,\ u_t(x,0)=x,\ x>0.$

24. $u_{tt}=4u_{xx}+16t^2,\, x>0,\, t>0,$ $\quad u(0,t)=4t^2,\ t>0,\ u(x,0)=\dfrac{1}{6}x^4,\ u_t(x,0)=2sinx,\ x>0.$

25. $9u_{tt}=u_{xx}, x>0, t>0,$ $\quad u(0,t)=t^3,\ t>0,\ u(x,0)=27x^3,\ u_t(x,0)=0,\ x>0.$

26. $u_{tt}=u_{xx}+2, x>0, t>0,$ $\quad u_x(0,t)=1,\ t>0,\ u(x,0)=x+cosx,\ u_t(x,0)=1,\ x>0.$

27. $u_{tt}=u_{xx}, x>0, t>0,$ $\quad u_x(0,t)=cost,\ t>0,\ u(x,0)=x,\ u_t(x,0)=1,\ x>0.$

28. $u_{tt}=9u_{xx}+e^t, x>0, t>0,$ $\quad u_x(0,t)=2-cost,\ t>0,\ u(x,0)=1+x,\ u_t(x,0)=4-3cos\dfrac{x}{3},\ x>0.$

29. $u_{tt}=u_{xx},\, x>0,\, t>0,$ $\quad u_x(0,t)+u(0,t)=1-cost,\ t>0,\ u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=0,\ x>0.$

30. $u_{tt}=u_{xx}+4,\, x>0,\, t>0,$ $\quad u_x(0,t)+u(0,t)=\dfrac{3}{2}t^2,\ t>0,\ u(x,0)=1-x,\ u_t(x,0)=0,\ x>0.$

Контрольна робота №6

Тема: *застосування методу відокремлення змінних* (*методу Фур'є*) *до розв'язання основних мішаних задач для рівнянь гіперболічного типу в декартових координатах*

Завдання 1: дати фізичну інтерпретацію та знайти методом Фур'є розв'язок мішаної задачі для хвильового рівняння:

1. $u_{tt} = a^2 u_{xx},\ 0 < x < l,\ t > 0,$
   $u(0,t) = 0,\ u(l,t) = 0,\ t > 0,$
   $u(x,0) = \psi_1(x),\ u_t(x,0) = \psi_2(x),\ 0 < x < l.$
2. $u_{tt} = a^2 u_{xx},\ 0 < x < \pi,\ t > 0,$
   $u_x(0,t) = 0,\ u_x(\pi,t) = 0,\ t > 0,$
   $u(x,0) = x,\ u_t(x,0) = 1,\ 0 < x < \pi.$
3. $u_{tt} = a^2 u_{xx},\ 0 < x < l,\ t > 0,$
   $u(0,t) = u_1,\ u_x(l,t) + hu(l,t) = u_2,\ t > 0,$
   $u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x),\ 0 < x < l.$
4. $u_{tt} = a^2 u_{xx},\ 0 < x < l,\ t > 0,$
   $u(0,t) = 0,\ u_x(l,t) = \dfrac{At^3}{ES},\ t > 0,$
   $u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = 0,\ 0 < x < l.$
5. $u_{tt} = a^2 u_{xx},\ 0 < x < 1,\ t > 0,$
   $u(0,t) = t + 1,\ u(1,t) = t^3 + 2,\ t > 0,$
   $u(x,0) = x + 1,\ u_t(x,0) = 0,\ 0 < x < 1.$
6. $u_{tt} = u_{xx},\ \ 0 < x < \dfrac{\pi}{2},\ t > 0,$
   $u(0,t) = 0,\ \ u\left(\dfrac{\pi}{2}, t\right) = sin\,t,\ t > 0,$
   $u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = 0,\ 0 < x < \dfrac{\pi}{2}.$
7. $u_{tt} = a^2 u_{xx},\quad 0 < x < l,\ t > 0,$
   $u_x(0,t) = 0,\ \ u_x(l,t) = Ae^{-t},\ t > 0,$
   $u(x,0) = \dfrac{Aa\,ch\dfrac{x}{a}}{sh\dfrac{l}{a}},\ \ u_t(x,0) = -\dfrac{Aa\,ch\dfrac{x}{a}}{sh\dfrac{l}{a}},\ 0 < x < l\cdot$
8. $u_{tt} = u_{xx} + 2b,\ 0 < x < l,\ t > 0,$
   $u(0,t) = 0,\ u(l,t) = 0 t > 0,$
   $u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = 0,\ 0 < x < l.$
9. $u_{tt} = a^2 u_{xx} + x,\ 0 < x < \pi,\ t > 0,$
   $u(0,t) = 0, u(\pi,t) = 0,\ t > 0,$
   $u(x,0) = sin\,2x, u_t(x,0) = 0,\ 0 < x < \pi.$

10. $u_{tt} = a^2 u_{xx} + b\,sh x,\ 0 < x < l,\ t > 0$,

$u(0,t) = 0,\ u(l,t) = 0, t > 0$,

$u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = 0,\ 0 < x < l$.

11. $u_{tt} = a^2 u_{xx} + bx(x - l),\ 0 < x < l,\ t > 0$,

$u(0,t) = 0,\ u(l,t) = 0,\ t > 0$,

$u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = 0,\ 0 < x < l$.

12. $u_{tt} = a^2 u_{xx} + e^{-t} \sin x,\ 0 < x < l,\ t > 0$,

$u(0,t) = 0,\ u(l,t) = 0, t > 0$,

$u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = 0,\ 0 < x < l$.

13. $u_{tt} = a^2 u_{xx} + xe^{-t},\ 0 < x < l,\ t > 0$,

$u(0,t) = 0,\ u(l,t) = 0, t > 0$,

$u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = 0,\ 0 < x < l$.

14. $u_{tt} = a^2 u_{xx} + Ae^{-t} \sin \frac{\pi x}{l},\ 0 < x < l,\ t > 0$,

$u(0,t) = 0,\ u(\pi,t) = 0,\ t > 0$,

$u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = 0,\ 0 < x < l$.

15. $u_{tt} = a^2 u_{xx} + \cos t,\ 0 < x < \pi,\ t > 0$,

$u(0,t) = u_1, u(\pi,t) = 0,\ t > 0$,

$u(x,0) = 0, u_t(x,0) = 0,\ 0 < x < \pi$.

16. $u_{tt} = a^2 u_{xx} + u,\ 0 < x < l,\ t > 0$,

$u(0,t) = t,\ u(l,t) = 0,\ t > 0$,

$u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = 0,\ 0 < x < l$.

17. $u_{tt} = a^2 u_{xx} + u,\ 0 < x < l,\ t > 0$,

$u_x(0,t) = 0,\ u(l,t) = t,\ t > 0$,

$u(x,0) = 0, u_t(x,0) = \frac{x}{l},\ 0 < x < l$.

18. $u_{tt} = u_{xx} - 4u,\ 0 < x < 1,\ t > 0$,

$u(0,t) = 0,\ u(1,t) = 0,\ t > 0$,

$u(x,0) = x^2 - x,\ u_t(x,0) = 0,\ 0 < x < 1$.

19. $u_{tt} = u_{xx} - u + 2xt,\ 0 < x < l,\ t > 0$,

$u(0,t) = 0,\ u_x(l,t) = 0,\ t > 0$,

$u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = x,\ 0 < x < l$.

20. $u_{tt} = u_{xx} - \frac{\pi}{3} u_t,\ 0 < x < 3,\ t > 0$,

$u_x(0,t) = 0,\ u(3,t) = 2t,\ t > 0$,

$u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = 2,\ 0 < x < 3$.

21. $u_{tt} + 2u_t = u_{xx} - u,\ 0 < x < \pi,\ t > 0$,

$u_x(0,t) = 0, u(\pi,t) = 0,\ t > 0$,

$u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = x,\ 0 < x < \pi$.

22. $u_{tt} = \frac{1}{4}u_{xx} - u + \sin x,\ 0 < x < 1,\ t > 0,$
$u_x(0,t) = 0,\ u_x(1,t) = 0,\ t > 0,$
$u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = x,\ 0 < x < 1.$

23. $u_{tt} + 2u_t = u_{xx} + 4x + 8e^t \cos x,\ 0 < x < \frac{\pi}{2},\ t > 0,$
$u_x(0,t) = 2t,\ u\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = \pi t,\ t > 0,$
$u(x,0) = \cos x, u_t(x,0) = 2x,\ 0 < x < \frac{\pi}{2}.$

24. $u_{tt} - 2u_t = u_{xx} + 4t(\sin x - x),\ 0 < x < \frac{\pi}{2},\ t > 0,$
$u(0,t) = 3,\ u_x\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = t^2 + t,\ t > 0,$
$u(x,0) = 3, u_t(x,0) = x + \sin x,\ 0 < x < \frac{\pi}{2}.$

25. $u_{tt} - 3u_t = u_{xx} + u - x(4+t) + \cos\frac{3x}{2},\ 0 < x < \pi,\ t > 0,$
$u_x(0,t) = t + 1,\ u(\pi,t) = \pi(t+1),\ t > 0,$
$u(x,0) = x, u_t(x,0) = x,\ 0 < x < \pi.$

26. $u_{tt} + 2u_t = u_{xx} + 8u + 2x(1-4t) + \cos 3x,\ 0 < x < \frac{\pi}{2},\ t > 0,$
$u_x(0,t) = t,\ u_x\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = \frac{\pi t}{2},\ t > 0,$
$u(x,0) = 0, u_t(x,0) = 0,\ 0 < x < \frac{\pi}{2}.$

27. $u_{tt} = u_{xx} + 10u + 2\sin 2x \cos x,\ 0 < x < \frac{\pi}{2},\ t > 0,$
$u(0,t) = 0,\ u_x\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = 0,\ t > 0,$
$u(x,0) = 0, u_t(x,0) = 0,\ 0 < x < \frac{\pi}{2}.$

28. $u_{tt} = u_{xx} + 4u + 2\sin^2 x,\ 0 < x < \pi,\ t > 0,$
$u_x(0,t) = 0,\ u_x(\pi,t) = 0,\ t > 0,$
$u(x,0) = 0, u_t(x,0) = 0,\ 0 < x < \pi.$

29. $u_{tt} - 7u_t = u_{xx} + 2u_x - 2t - 7x - e^{-x}\sin 3x,\ 0 < x < \pi,\ t > 0,$
$u(0,t) = \pi t,\ u(\pi,t) = \pi t,\ t > 0,$
$u(x,0) = 0, u_t(x,0) = x,\ 0 < x < \pi.$

30. $u_{tt} - 3u_t = u_{xx} + 2u_x - 3x - 2t,\ 0 < x < \pi,\ t > 0,$
$u(0,t) = 0, u(\pi,t) = \pi t,\ t > 0,$
$u(x,0) = e^{-x}\sin x, u_t(x,0) = x,\ 0 < x < \pi.$

Завдання 2: сформулювати мішану задачу для хвильового рівняння і розв'язати її методом Фур'є:

1. Один кінець однорідного стрижня довжиною l закріплений пружно, а інший вільний. Знайти повздовжні коливання стрижня при довільних початкових умовах.
2. Однорідний стрижень довжиною l, кінець $x=0$ якого жорстко закріплений, знаходиться в стані спокою. З моменту часу $t=0$ до вільного кінця стрижня $x=l$ прикладена сила $Q=const$ (на одиницю площі), яка діє вздовж стрижня. Знайти зміщення стрижня в довільний момент часу $t>0$.
3. Один кінець однорідного стрижня закріплений пружно, а до другого прикладена повздовжна сила $Q=const$, під дією якої стрижень знаходиться в стані рівноваги. Знайти повздовжні коливання стрижня, якщо в початковий момент часу сила Q миттєво зникає, а початкові швидкості дорівнюють нулю.
4. Знайти повздовжні коливання однорідного стрижня $0\le x\le l$, лівий кінець якого закріплено жорстко, а до правого з моменту часу $t=0$ прикладена сила $F(t)=At$, $A=const$.
5. Знайти повздовжні коливання однорідного стрижня $0\le x\le l$ з жорстко закріпленими кінцями під дією рівномірно розподіленої сили, прикладеної з моменту $t=0$, яка має густину $F(x,t)=G(x)t^m$, $m\ge 0$.
6. Стрижень підвішено вертикально і закріплено так, що зміщення в усіх точках дорівнює нулю. В момент часу $t=0$ стрижень звільняється, залишаючись закріпленим у верхній точці. Вивчити вимушені коливання стрижня.
7. Однорідна струна $0\le x\le l$, кінці якої закріплено, має в початковий момент часу форму параболи, симетричної відносно перпендикуляра, проведеного через точку $x = l/2$. Знайти закон коливань точок струни в припущенні, що початкові швидкості відсутні.
8. Однорідна струна $0\le x\le l$, кінці якої закріплено, відтягнута в початковий момент часу в точці $x=c$ на величину h і відпущена без початкової швидкості. Знайти закон коливань точок струни.
9. Вивчити вільні коливання однорідної струни $0\le x\le l$ із закріпленими кінцями, що коливається в середовищі, опір якого пропорційний швидкості. Початкове відхилення і початкова швидкість точок струни довільні.
10. Знайти закон вільних коливань однорідної струни довжиною l, якщо в початковий момент струні було надано форму кривої $\varphi(x)=\dfrac{l}{100}\sin\dfrac{\pi x}{2l}$, а потім струна була відпущена без початкової швидкості. Струну закріплено в лівому кінці $x=0$, правий кінець $x=l$ – вільний.
11. Кінці однорідної струни довжиною l утримуються за допомогою пружних сил на прямих паралельних осі $0u$. Вивчити вільні поперечні коливання струни, якщо початкове відхилення точок струни дорівнює $\dfrac{x^2(x-l)^2}{4}$, а початкова їх швидкість – нулю.

12. Знайти закон коливання однорідної струни $0 \le x \le l$, якщо в початковий момент всім точкам струни надана швидкість, рівна $\frac{a}{10}$(де a – стала, яка фігурує в рівнянні струни). Початкове відхилення відсутнє, кінці струни закріплені.
13. Вивчити вимушені поперечні коливання однорідної струни $0 \le x \le l$, кінець $x=0$ якої закріплений, а кінець $x=l$ рухається за законом $A\sin\omega t$, де $\omega \ne \frac{ak\pi}{l}$, $k=1,2,3,\ldots$; a – стала, яка фігурує в рівнянні струни. В момент часу $t=0$ відхилення і швидкість точок струни дорівнюють нулю.
14. Струна $0 \le x \le l$ із закріпленими кінцями збурюється ударом жорсткого плоского молоточка, який надає їй початковий розподіл швидкості
$$\psi(x) = \begin{cases} 0,\ 0 \le x \le x_0 - \delta, \\ v_0,\ x_0 - \delta \le x \le x_0 + \delta, \\ 0,\ x_0 + \delta \le x \le l. \end{cases}$$
Знайти коливання струни, якщо початкове відхилення дорівнює нулю.
15. Знайти закон коливання однорідної струни $0 \le x \le l$ із закріпленими кінцями, якщо з моменту часу $t=0$ до неї прикладено неперервно розподілену силу з густиною (в розрахунку на одиницю маси струни) $g(x,t) = \frac{a^2}{10l}\sin\omega t$, $\omega \ne \frac{ak\pi}{l}$, $k=1,2,3,\ldots$; a – стала, яка фігурує в рівнянні струни. В момент часу $t=0$ відхилення і швидкість точок струни дорівнюють нулю.
16. На струну $0 \le x \le l$ із закріпленими кінцями постійно діє зовнішня сила, інтенсивність якої (в розрахунку на одиницю маси струни) $g(x,t) = \frac{a^2}{10l}\sin\frac{a\pi t}{l}$, де a – стала, яка фігурує в рівнянні струни. Знайти закон коливання струни, якщо в момент часу $t=0$ відхилення і швидкість точок струни дорівнюють нулю.
17. Вивчити вимушені поперечні коливання однорідної струни $0 \le x \le l$, кінець $x=0$ якої закріплений, а кінець $x=l$ рухається за законом $A\cos\omega t$. В момент часу $t=0$ відхилення і швидкість точок струни дорівнюють нулю. Знайти коливання струни в середовищі без опору, дослідити можливість резонансу і знайти розв'язок у випадку резонансу.
18. Вивчити вимушені поперечні коливання однорідної струни $0 \le x \le l$, кінець $x=l$ якої закріплений, а до кінця $x=0$ прикладена поперечна збурююча сила $F=A\cos\omega t$. В момент часу $t=0$ відхилення і швидкість точок струни дорівнюють нулю. Знайти коливання струни в середовищі без опору, дослідити можливість резонансу і знайти розв'язок у випадку резонансу.
19. До струни $0 \le x \le l$ з жорстко закріпленими кінцями з моменту часу $t=0$ прикладено неперервно розподілену силу з густиною $g(x,t)=x^3\sin\omega t$. Знайти коливання струни в середовищі без опору, дослідити можливість резонансу і знайти розв'язок у випадку резонансу.

20. Вивчити вимушені поперечні коливання однорідної струни $0 \le x \le l$, кінець $x=0$ якої закріплений, а до кінця $x=l$ прикладена поперечна збурююча сила $F=A\sin\omega t$. В момент часу $t=0$ відхилення і швидкість точок струни дорівнюють нулю. Знайти коливання струни в середовищі без опору, дослідити можливість резонансу і знайти розв'язок у випадку резонансу.
21. До струни $0 \le x \le l$ з жорстко закріпленими кінцями з моменту часу $t=0$ прикладено неперервно розподілену силу з густиною $g(x,t) = x(l-x)\sin\omega t$. Знайти коливання струни в середовищі без опору, дослідити можливість резонансу і знайти розв'язок у випадку резонансу.
22. Однорідна квадратна мембрана $0 \le x, y \le b$, яка має в початковий момент часу $t=0$ форму $Axy(b-x)(b-y)$, $A=const$, почала коливатися без початкової швидкості. Дослідити вільні коливання мембрани, закріпленої по контуру.
23. Знайти в середовищі без опору поперечні коливання однорідної прямокутної мембрани $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$, закріпленої по контуру, які викликані початковою швидкістю $Axy(a-x)(b-y)$, $A=const$.
24. Знайти поперечні коливання однорідної квадратної мембрани $0 \le x, y \le p$, закріпленої по контуру, якщо в початковий момент часу $t=0$ відхилення точок мембрани в кожній точці визначались рівністю $\frac{p}{100}\sin\frac{\pi x}{p}\sin\frac{\pi y}{p}$. Початкова швидкість дорівнює нулю. Опором навколишнього середовища можна знехтувати.
25. Знайти поперечні коливання однорідної прямокутної мембрани $0 \le x \le s$, $0 \le y \le p$, які викликані початковою швидкістю $A(s-x)\sin\frac{\pi y}{p}$. Частина межі мембрани $x=0$ вільна, а решта закріплена жорстко. Опором навколишнього середовища можна знехтувати.
26. Знайти поперечні коливання однорідної прямокутної мембрани $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$, викликані початковим відхиленням Axy. Частина межі мембрани $x=a$ і $y=b$ вільна, а решта закріплена жорстко. Опором навколишнього середовища можна знехтувати.
27. Знайти поперечні коливання однорідної прямокутної мембрани $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$, закріпленої по контуру, які викликані неперервно розподіленою по мембрані і перпендикулярною до її поверхні силою з густиною $A(x,y)\sin\omega t$, $A=const$. Опором навколишнього середовища можна знехтувати.
28. Знайти поперечні коливання однорідної прямокутної мембрани $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$, закріпленої по контуру, викликані поперечним зосередженим імпульсом K, переданим мембрані в точці (x_0, y_0), $0 < x_0 < a$, $0 < y_0 < b$.
29. Знайти поперечні коливання однорідної прямокутної мембрани $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$, закріпленої по контуру, в середовищі з опором, пропорційним швидкості, які викликані неперервно розподіленою по мембрані і перпендикулярною до її поверхні силою з густиною $A\sin\omega t$, $A=const$.

30. Знайти закон вільних коливань однорідної прямокутної мембрани $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$, якщо кінці $x=0$ і $x=a$ нерухомо закріплені, а $u(x,0,t)=u(x,b,t)=h\sin\frac{\pi x}{a}$. В початковий момент часу мембрана мала форму $u(x,y,0)=h\sin\frac{\pi x}{a}$, а швидкість усіх її точок дорівнює $V_0\sin\frac{\pi x}{a}$ ($h, V_0 = const$).

Контрольна робота №7

Тема: *застосування методу відокремлення змінних (методу Фур'є) до розв'язання основних мішаних задач для рівнянь параболічного типу в декартових координатах*

Завдання 1: дати фізичну інтерпретацію та знайти методом Фур'є розв'язок мішаної задачі для рівняння теплопровідності:

1. $u_t = a^2 u_{xx} - hu,\ 0 < x < l,\ t > 0$,
$u(0,t) = u_1,\ u_x(l,t) + hu(l,t) = 0,\ t > 0$,
$u(x,0) = \varphi(x),\ 0 < x < l$.
2. $u_t = a^2 u_{xx} + 2b,\ 0 < x < l,\ t > 0$,
$u(0,t) = u_1,\ u_x(l,t) = u_2,\ t > 0$,
$u(x,0) = \varphi(x),\ 0 < x < l$.
3. $u_t = a^2 u_{xx} + 2bx,\ 0 < x < l,\ t > 0$,
$u_x(0,t) = u_1,\ u(l,t) = 0,\ t > 0$,
$u(x,0) = \varphi(x),\ 0 < x < l$.
4. $u_t = a^2 u_{xx},\ 0 < x < 1,\ t > 0$,
$u(0,t) = 3(1 - e^{-t}),\ u_x(1,t) + u(1,t) = 0,\ t > 0$,
$u(x,0) = \varphi(x),\ 0 < x < 1$.
5. $u_t = a^2 u_{xx},\ 0 < x < l,\ t > 0$,
$u(0,t) = u_0,\ u_x(l,t) = Q_0,\ t > 0$,
$u(x,0) = \varphi(x),\ 0 < x < l$.
6. $u_t = a^2 u_{xx} - h(u - u_0),\ 0 < x < l,\ t > 0$,
$u_x(0,t) = u_1,\ u(l,t) = u_2,\ t > 0$,
$u(x,0) = \varphi(x),\ 0 < x < l$.
7. $u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t),\ 0 < x < l,\ t > 0$,
$u_x(0,t) = Q,\ u_x(l,t) + \alpha u(l,t) = \alpha_0,\ t > 0$,
$u(x,0) = u_0,\ 0 < x < l$.
8. $u_t = u_{xx} - 2u_x + x + 2t,\ 0 < x < 1,\ t > 0$,
$u(0,t) = 0,\ u(1,t) = t,\ t > 0$,
$u(x,0) = e^x \sin \pi x,\ 0 < x < 1$.

9. $u_t = u_{xx} + 4u + x^2 - 2t - 4x^2t + 2\cos^2 x,\ 0 < x < \pi,\ t > 0,$
$u_x(0,t) = 0,\ u_x(\pi,t) = 2\pi t,\ t > 0,$
$u(x,0) = 0,\ 0 < x < \pi.$

10. $u_t = u_{xx} + u + 2\sin 2x \sin x,\ 0 < x < \dfrac{\pi}{2},\ t > 0,$
$u_x(0,t) = 0,\ u\left(\dfrac{\pi}{2},t\right) = 0,\ t > 0,$
$u(x,0) = 0,\ 0 < x < \dfrac{\pi}{2}.$

11. $u_t = u_{xx} + u + xt(2-t) + 2\cos t,\ 0 < x < \pi,\ t > 0,$
$u_x(0,t) = t^2,\ u_x(\pi,t) = t^2,\ t > 0,$
$u(x,0) = \cos 2x,\ 0 < x < \pi.$

12. $u_t = u_{xx} + 6u + 2t(1-3t) - 6x + 2\cos x \cos 2x,\ 0 < x < \dfrac{\pi}{2},\ t > 0,$
$u_x(0,t) = 1,\ u\left(\dfrac{\pi}{2},t\right) = t^2 + \dfrac{\pi}{2},\ t > 0,$
$u(x,0) = x,\ 0 < x < \dfrac{\pi}{2}.$

13. $u_t = u_{xx} + 6u + x^2(1-6t) - 2(t+3x) + \sin 2x,\ 0 < x < \pi,\ t > 0,$
$u_x(0,t) = 1,\ u_x(\pi,t) = 2\pi t + 1,\ t > 0,$
$u(x,0) = x,\ 0 < x < \pi.$

14. $u_t = u_{xx} + 4u_x + x - 4t + 1 + e^{-2x}\cos^2 \pi x,\ 0 < x < 1,\ t > 0,$
$u(0,t) = t,\ u(1,t) = 2t,\ t > 0,$
$u(x,0) = 0,\ 0 < x < 1.$

15. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = 9\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right),\ 0 < x < 2,\ 0 < y < 3,$
$u(0,y,t) = 0,\ u(2,y,t) = 0,\ u(x,0,t) = \sin\dfrac{\pi}{2}x,\ u(x,3,t) = 0,\ t > 0,$
$u(x,y,0) = xy,\ 0 < x < 2,\ 0 < y < 3.$

Завдання 2: сформулювати мішану задачу для рівняння теплопровідності і розв’язати її методом Фур’є:

1. Знайти закон розподілу температури в однорідному ізотропному стрижні $0 \le x \le l$ з теплоізольованою бічною поверхнею, якщо температура його кінців підтримується рівною нулю, а початкова температура є заданою функцією $\varphi(x)$. Розглянути випадки: *a*) $\varphi(x) = u_0 = const$; *b*) $\varphi(x) = \begin{cases} x,\ 0 \le x \le \dfrac{l}{2}, \\ l - x,\ \dfrac{l}{2} \le x \le l. \end{cases}$

2. Знайти закон зміни температури в однорідному ізотропному стрижні $0 \le x \le l$ з теплоізольованою бічною поверхнею, якщо кінець $x=0$ підтримується при нульовій температурі, а на кінці $x=l$ відбувається конвективний теплообмін з навколишнім середовищем нульової температури. Початкова температура стрижня є заданою функцією $\varphi(x)$.
3. Початкова температура стрижня $0 \le x \le l$ з теплоізольованою бічною поверхнею дорівнює $u_0 = const$, а на кінцях його підтримується стала температура $u(0,t) = u_1 = const$, $u(l,t) = u_2 = const$. Знайти температуру стрижня в довільний момент часу $t > 0$.
4. Дано тонкий однорідний ізотропний стрижень $0 \le x \le l$ з теплоізольованою бічною поверхнею, початкова температура якого є заданою функцією $\varphi(x)$. Кінець стрижня $x=0$ має сталу температуру $u_1 = const$, на кінці $x=l$ задано сталий тепловий потік густиною q. Знайти температуру стрижня в довільний момент часу $t > 0$.
5. Знайти закон розподілу температури в однорідному ізотропному стрижні $0 \le x \le l$ з теплоізольованою бічною поверхнею, якщо його кінець $x=0$ теплоізольований, а на кінці $x=l$ відбувається конвективний теплообмін з навколишнім середовищем, температура якого дорівнює $u_0 = const$. Початкова температура стрижня є заданою функцією $\varphi(x)$.
6. Знайти закон зміни температури в однорідному ізотропному стрижні $0 \le x \le l$, через бічну поверхню якого проходить теплообмін із зовнішнім середовищем нульової температури. Температури кінців сталі $u(0,t) = u_1 = const$, $u(l,t) = u_2 = const$. Початкова температура стрижня є заданою функцією $\varphi(x)$.
7. Визначити температуру однорідного ізотропного стрижня $0 \le x \le l$, через бічну поверхню якого проходить теплообмін із зовнішнім середовищем, температура якого дорівнює нулю, якщо кінці стрижня теплоізольовані, а початкова температура дорівнює $u_0 = const$.
8. Дано тонкий однорідний ізотропний стрижень $0 \le x \le l$ з теплоізольованою бічною поверхнею, початкова температура якого дорівнює $A\frac{x}{l}$. На кінці $x=0$ температура підтримується рівною нулю, а на кінці $x=l$ вона змінюється з часом за законом $u(l,t) = Ae^{-t}$. Знайти розподіл температури всередині стрижня при $t > 0$.
9. Дано тонкий однорідний ізотропний стрижень $0 \le x \le l$ з теплоізольованою бічною поверхнею, початкова температура якого дорівнює нулю. На кінці $x=l$ температура підтримується рівною нулю, а на кінці $x=0$ вона зростає лінійно з часом, тобто $u(0,t) = At$, $A=const$. Знайти розподіл температури всередині стрижня при $t > 0$.
10. Знайти закон розподілу температури в однорідному ізотропному стрижні $0 \le x \le l$ з теплоізольованою бічною поверхнею, якщо по стрижню неперервно розподілені теплові джерела з густиною $F(t)\sin\frac{\pi x}{l}$, початкова температура є заданою функцією $\varphi(x)$, а температура кінців підтримується рівною нулю.

11. Знайти закон розподілу температури в однорідному ізотропному стрижні $0 \le x \le l$ з теплоізольованою бічною поверхнею, початкова температура якого дорівнює нулю. На кінці $x=0$ температура підтримується рівною нулю, а на кінці $x=l$ вона змінюється за законом $u(l,t) = A \sin \omega t$. Знайти розподіл температури всередині стрижня при $t > 0$.
12. Початкова температура нескінченного прямокутного стрижня $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$, $-\infty \le z \le \infty$ є заданою функцією $\varphi(x,y)$. Визначити температуру всередині стрижня при $t > 0$, якщо частина його поверхні $x=0$, $0<y<b$ теплоізольована, а інша частина поверхні підтримується при нульовій температурі.
13. Початкова температура нескінченного прямокутного стрижня $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$, $-\infty \le z \le \infty$ є заданою функцією $\varphi(x,y)$. Визначити температуру всередині стрижня при $t > 0$, якщо на частині його поверхні $x=a$, $0<y<b$ відбувається конвективний теплообмін із зовнішнім середовищем нульової температури, частина $y=0$, $0<x<a$ – теплоізольована, а вся інша поверхня стрижня підтримується при нульовій температурі.
14. Визначити температуру паралелепіпеда $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$, $0 \le z \le c$, якщо його початкова температура є заданою функцією $\varphi(x,y,z)$, а температура поверхні підтримується рівною нулю.
15. Знайти температуру паралелепіпеда $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$, $0 \le z \le c$, якщо через одну його грань проходить теплообмін із зовнішнім середовищем нульової температури, а всі інші грані теплоізольовані. Початкова температура є заданою функцією $\varphi(x,y,z)$. Розглянути випадок $\varphi(x,y,z) = u_0 = const$.

Контрольна робота №8

Тема: *застосування методу відокремлення змінних (методу Фур'є) до розв'язання основних мішаних задач для рівнянь гіперболічного та параболічного типу в полярних, циліндричних та сферичних координатах. Використання функцій Бесселя*

Завдання 1: знайти методом Фур'є розв'язок мішаної задачі:

1. $u_{tt} = u_{xx} + \frac{1}{x} u_x + (\sin t + \cos t) J_0(\mu_k x),\ 0 < x < 1,\ t > 0,$

$|u(0,t)| < \infty,\ u(1,t) = 0,\ t > 0,$

$u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = 0,\ 0 < x < 1,$

де μ_k – додатний корінь рівняння $J_0(\mu)=0$.

2. $u_{tt} = u_{xx} + \frac{1}{x} u_x - \frac{u}{x^2} + e^t J_1(\mu_k x),\ 0 < x < 1,\ t > 0,$

$|u(0,t)| < \infty,\ u(1,t) = 0,\ t > 0,$

$u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = 0,\ 0 < x < 1,$

де μ_k – додатний корінь рівняння $J_1(\mu)=0$.

3. $u_{tt} = u_{xx} + \frac{1}{x}u_x - \frac{9u}{x^2} + e^{-t}J_3(\mu_k x),\ 0 < x < 1,\ t > 0$,

$|u(0,t)| < \infty,\ u(1,t) = 0,\ t > 0$,

$u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = 0,\ 0 < x < 1$,

де μ_k – додатний корінь рівняння $J_3(\mu)=0$.

4. $u_{tt} = u_{xx} + \frac{1}{x}u_x,\ 0 < x < 1,\ t > 0$,

$|u(0,t)| < \infty,\ u(1,t) = t - 1,\ t > 0$,

$u(x,0) = J_0(\mu_1 x) - 1,\ u_t(x,0) = 1,\ 0 < x < 1$,

де μ_1 – додатний корінь рівняння $J_0(\mu)=0$.

5. $u_{tt} = u_{xx} + \frac{1}{x}u_x - u,\ 0 < x < 1,\ t > 0$,

$|u(0,t)| < \infty,\ u(1,t) = \cos 2t + \sin 3t,\ t > 0$,

$u(x,0) = \frac{J_0(x\sqrt{3})}{J_0(\sqrt{3})},\ u_t(x,0) = \frac{3J_0(2x\sqrt{2})}{J_0(2\sqrt{2})},\ 0 < x < 1$.

6. $u_{tt} = u_{xx} + \frac{1}{x}u_x - \frac{9u}{x^2},\ 0 < x < 1,\ t > 0$,

$|u(0,t)| < \infty,\ u(1,t) = 0,\ t > 0$,

$u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = J_3(\mu_1 x),\ 0 < x < 1$,

де μ_1 – додатний корінь рівняння $J_3(\mu)=0$.

7. $u_{tt} = u_{xx} + \frac{1}{x}u_x - \frac{9u}{x^2} + (t - t^2)J_3(\mu_k x),\ 0 < x < 1,\ t > 0$,

$|u(0,t)| < \infty,\ u(1,t) = 0,\ t > 0$,

$u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = 0,\ 0 < x < 1$,

де μ_k – додатний корінь рівняння $J_3(\mu)=0$.

8. $u_{tt} = u_{xx} + \frac{1}{x}u_x - \cos t,\ 0 < x < 1,\ t > 0$,

$|u(0,t)| < \infty,\ u(1,t) = 0,\ t > 0$,

$u(x,0) = 1 - \frac{J_0(2x)}{J_0(2)},\ u_t(x,0) = 0,\ 0 < x < 1$.

9. $u_{tt} = u_{xx} + \frac{1}{x}u_x - \frac{u}{x^2},\ 0 < x < 1,\ t > 0$,

$|u(0,t)| < \infty,\ u(1,t) = \sin 2t \cos t,\ t > 0$,

$u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = \frac{J_1(x)}{2J_1(1)} + \frac{3}{2}\frac{J_1(3x)}{J_1(3)},\ 0 < x < 1$.

10. $u_{tt} = xu_{xx} + u_x + tJ_0\left(\mu_1\sqrt{x}\right), 0 < x < 1, t > 0$,

$|u(0,t)| < \infty, u(1,t) = 0, t > 0$,

$u(x,0) = 0, u_t(x,0) = 0, 0 < x < 1$,

де μ_1 – додатний корінь рівняння $J_1(\mu)$=0.

11. $u_t = u_{xx} + \frac{1}{x}u_x + tJ_0(\mu_1 x), 0 < x < 1, t > 0$,

$|u(0,t)| < \infty, u(1,t) = 0, t > 0$,

$u(x,0) = 0, 0 < x < 1$,

де μ_1 – додатний корінь рівняння $J_0(\mu)$=0.

12. $u_t = u_{xx} + \frac{1}{x}u_x - \frac{u}{x^2} + sin\, tJ_1(\mu_k x), 0 < x < 1, t > 0$,

$|u(0,t)| < \infty, u(1,t) = 0, t > 0$,

$u(x,0) = 0, 0 < x < 1$,

де μ_k – додатний корінь рівняння $J_1(\mu)$=0.

13. $u_t = u_{xx} + \frac{1}{x}u_x - \frac{9u}{4x}, 0 < x < 1, t > 0$,

$|u(0,t)| < \infty, u(1,t) = 0, t > 0$,

$u(x,0) = J_3\left(\mu_k\sqrt{x}\right), 0 < x < 1$,

де μ_k – додатний корінь рівняння $J_3(\mu)$=0.

14. $u_t = u_{xx} + \frac{1}{x}u_x - \frac{u}{x^2} + e^{-t}J_1(\mu_k x), 0 < x < 1, t > 0$,

$|u(0,t)| < \infty, u(1,t) = 0, t > 0$,

$u(x,0) = 0, 0 < x < 1$,

де μ_k – додатний корінь рівняння $J_1(\mu)$=0.

15. $u_t = xu_{xx} + u_x - \frac{u}{4x} + tJ_1\left(\mu_k\sqrt{x}\right), 0 < x < 1, t > 0$,

$|u(0,t)| < \infty, u(1,t) = 0, t > 0$,

$u(x,0) = 0, 0 < x < 1$,

де μ_k – додатний корінь рівняння $J_1(\mu)$=0.

Завдання 2: сформулювати мішану задачу і розв’язати її методом Фур’є:

1. Кругла однорідна мембрана радіуса R закріплена по контуру і знаходиться в стані рівноваги при натягу T. З моменту часу t=0 до поверхні мембрани прикладено рівномірне навантаження $P_0 sin\omega t$. Знайти радіальні коливання мембрани.
2. Кругла однорідна мембрана радіуса R з центром в початку координат здійснює поперечні коливання в середовищі без опору. Визначити коливання мембрани, закріпленої по контуру, викликані сталою початковою швидкістю її точок.

3. Вивчити вільні коливання однорідної круглої мембрани радіуса R, закріпленої по контуру, якщо в початковий момент часу вона була поверхнею параболоїда обертання, а початкові швидкості дорівнюють нулю.
4. Вивчити вільні коливання однорідної круглої мембрани $0\le\rho\le R$, $0\le\varphi\le 2\pi$, закріпленої по контуру, якщо початкові відхилення її точок задано функцією $u\big|_{t=0} = A\dfrac{\rho}{R}\cos\varphi, \quad A = const$, а початкові швидкості дорівнюють нулю.
5. Дослідити радіальний розподіл тепла в нескінченному однорідному ізотропному круговому циліндрі радіуса R, бічна поверхня якого підтримується при сталій температурі u_0. Початкова температура всередині циліндра дорівнює нулю.
6. Дано необмежений циліндр радіуса R, початкова температура дорівнює $f(r)$. З бічної поверхні циліндра випромінюється тепло в навколишнє середовище, температура якого дорівнює нулю. Знайти розподіл температури всередині циліндра в довільний момент часу $t>0$.
7. Знайти розподіл температури в нескінченному однорідному ізотропному круговому циліндрі радіуса R, якщо його початкова температура $u\big|_{t=0} = u_0\left(1-\dfrac{\rho^2}{R^2}\right)$, $u_0 = const$, а на бічній поверхні підтримується нульова температура.
8. Знайти розподіл температури в нескінченному однорідному ізотропному круговому циліндрі радіуса R, якщо на його бічній поверхні підтримується нульова температура, а температура всередині циліндра в початковий момент часу $u\big|_{t=0} = AJ_0\left(\dfrac{\mu_k r}{R}\right)$, де μ_k – додатний корінь рівняння $J_0(\mu)=0$.
9. Знайти розподіл температури в нескінченному однорідному ізотропному круговому циліндрі радіуса R з початковою температурою $f(\rho,\varphi)$, якщо на його бічній поверхні підтримується нульова температура.
10. Знайти розподіл температури в нескінченному однорідному ізотропному круговому циліндрі радіуса R з початковою температурою $f(\rho,\varphi)$, якщо на його бічній поверхні проходить конвективний теплообмін з середовищем нульової температури.
11. Знайти розподіл температури в нескінченному однорідному ізотропному круговому циліндрі радіуса R, на поверхні якого задано сталий тепловий потік q. Початкова температура всередині циліндра дорівнює нулю.
12. Температура поверхні однорідної ізотропної кулі $0\le\rho\le R$ підтримується при сталій температурі u_0. Визначити температуру всередині кулі, якщо початкова температура залежить тільки від віддалі ρ точки кулі до її центру.
13. На поверхні однорідної ізотропної кулі $0\le\rho\le R$ проходить конвективний теплообмін за законом Ньютона з середовищем, температура якого дорівнює нулю. Знайти температуру всередині кулі, якщо початкова температура залежить тільки від віддалі ρ точки кулі до її центру.

14. Початкова температура однорідної ізотропної кулі $0\le\rho\le R$ становить $u_0=const$, а на поверхні кулі задано сталий тепловий потік густиною q. Знайти температуру всередині кулі в довільний момент часу $t>0$.
15. Знайти розподіл температури в однорідній ізотропній кулі $0\le\rho\le R$ за умови, що в ній, починаючи з моменту $t=0$, діють джерела тепла густиною Q, а поверхня має нульову температуру. Початкова температури кулі дорівнює нулю.

Контрольна робота №9

Тема: *застосування методу відокремлення змінних (методу Фур'є) до розв'язання основних крайових задач для рівнянь еліптичного типу. Використання поліномів Лежандра та сферичних функцій*

Завдання 1: знайти гармонічну функцію:

1. В крузі $0\le r\le a$, $0\le\varphi\le 2\pi$ і таку, що
   $a)\ u|_{r=a}=2sin^2\varphi+4cos^3\varphi$; $b)\ u|_{r=a}=32(sin^6\varphi+cos^6\varphi)$; $c)\ u_r|_{r=a}=4sin^3\varphi$;
   $d)\ u_r|_{r=a}=4sin^3\varphi$; $e)\ (u_r+u)|_{r=a}=sin\varphi+cos4\varphi$.
2. Зовні круга $r\ge a$, $0\le\varphi\le 2\pi$ і таку, що
   $a)\ u|_{r=a}=8cos^4\varphi$; $b)\ u|_{r=a}=cos^2\varphi$; $c)\ u_r|_{r=a}=sin\varphi+4sin^3\varphi$; $d)\ (u_r-u)|_{r=a}=1+cos2\varphi$.
3. Всередині сектора $0\le r\le a$, $0\le\varphi\le\alpha$ і таку, що
   $a)\ u|_{\varphi=0}=0, u|_{\varphi=\pi}=0, u|_{r=a}=\varphi(\pi-\varphi)$; $b)\ u|_{\varphi=0}=0, u_\varphi|_{\varphi=\frac{\pi}{4}}=0, u|_{r=a}=1$;
   $c)\ u_\varphi|_{\varphi=0}=0, u_\varphi|_{\varphi=\frac{\pi}{2}}=0, u|_{r=a}=1+cos4\varphi$; $d)\ u_\varphi|_{\varphi=0}=0, u|_{\varphi=\pi}=0, u_r|_{r=a}=sin\varphi$.
4. В кільці $a\le r\le b$, $0\le\varphi\le 2\pi$ і таку, що
   $a)\ u|_{r=a}=0, u|_{r=b}=sin\varphi+2cos^2\varphi$; $b)\ u_r|_{r=a}=4sin^3\varphi, u|_{r=b}=0$; $c)\ u|_{r=a}=1, u_r|_{r=b}=2sin^2\varphi$;
   $d)\ u_r|_{r=a}=sin\varphi, u_r|_{r=b}=cos\varphi$; $e)\ u|_{r=a}=1+cos^2\varphi, u|_{r=b}=sin^2\varphi$.
5. Всередині кільцевого сектора $a\le r\le b$, $0\le\varphi\le\alpha$ і таку, що
   $a)\ u|_{\varphi=0}=0, u|_{\varphi=\pi}=0, u|_{r=a}=sin\varphi, u|_{r=b}=0$; $b)\ u|_{\varphi=0}=0, u|_{\varphi=\frac{\pi}{2}}=0, u_r|_{r=a}=cos\varphi, u|_{r=b}=sin2\varphi$;
   $c)\ u_\varphi|_{\varphi=0}=0, u_\varphi|_{\varphi=\frac{\pi}{2}}=0, u|_{r=a}=0, u|_{r=b}=1$; $d)\ u|_{\varphi=0}=0, u_\varphi|_{\varphi=\pi}=0, u|_{r=a}=sin\frac{3\varphi}{2}, u|_{r=b}=sin\frac{3\varphi}{2}$.
6. В прямокутнику $0\le x\le a$, $0\le y\le b$ і таку, що
   $a)\ u_x|_{x=0}=0, u_x|_{x=a}=0, u|_{y=0}=1, u|_{y=b}=2$; $b)\ u|_{x=0}=0, u_x|_{x=a}=0, u|_{y=0}=0, u|_{y=b}=sin\frac{5\pi x}{2a}$;
   $c)\ u|_{x=0}=1, u_x|_{x=a}=cos\frac{3\pi y}{2b}$, $u_y|_{y=0}=0, u|_{y=b}=0$; $d)\ u_x|_{x=0}=0, u_x|_{x=a}=0, u_y|_{y=0}=1, u|_{y=b}=1$.

7. В прямокутному паралелепіпеді $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$, $0 \le z \le c$ і таку, що
   $a)$ $u\big|_{x=0}=0, u\big|_{x=a}=0, u_y\big|_{y=0}=0, u_y\big|_{y=b}=0, u\big|_{z=0}=sinx\,cosy, u\big|_{z=c}=sin2x\,cos2y$;
   $b)$ $u\big|_{x=0}=0, u\big|_{x=a}=1, u\big|_{y=0}=0, u\big|_{y=b}=1, u\big|_{z=0}=0, u\big|_{z=c}=1$;
   $c)$ $u_x\big|_{x=0}=0, u_x\big|_{x=a}=0, u_y\big|_{y=0}=0, u_y\big|_{y=b}=0, u\big|_{z=0}=1, u\big|_{z=c}=3$.
8. Всередині прямого кругового циліндра $0 \le r \le a$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le z \le h$ і таку, що
   $a)$ $u\big|_{r=a}=cos^2\varphi, u\big|_{z=0}=0, u\big|_{z=h}=0$; $b)$ $u_r\big|_{r=a}=0, u\big|_{z=0}=r^2 sin2\varphi, u_z\big|_{z=h}=0$;
   $c)$ $u\big|_{r=a}=z\,sin\varphi, u\big|_{z=0}=0, u\big|_{z=h}=1$; $d)$ $u\big|_{r=a}=1+2cos2\varphi, u_z\big|_{z=0}=0, u_z\big|_{z=h}=0$
9. Всередині прямого циліндра висоти h в основі якого лежить круговий сектор $0 \le r \le a$, $0 \le \varphi \le \alpha$ і таку, що
   $a)$ $u\big|_{\varphi=0}=0, u\big|_{\varphi=\pi}=0, u\big|_{r=a}=1, u_z\big|_{z=0}=0, u_z\big|_{z=h}=0$;
   $b)$ $u_\varphi\big|_{\varphi=0}=0, u_\varphi\big|_{\varphi=\frac{\pi}{2}}=0, u\big|_{r=a}=z\,cos2\varphi, u\big|_{z=0}=0, u\big|_{z=h}=0$;
   $c)$ $u\big|_{\varphi=0}=0, u_\varphi\big|_{\varphi=\pi}=0, u\big|_{r=a}=0, u\big|_{z=0}=0, u\big|_{z=h}=r^{\frac{3}{2}} sin\dfrac{3\varphi}{2}$;
   $d)$ $u_\varphi\big|_{\varphi=0}=0, u_\varphi\big|_{\varphi=\frac{\pi}{4}}=0, u\big|_{r=a}=0, u\big|_{z=0}=r^4 cos4\varphi, u\big|_{z=h}=1$.
10. Всередині кулі радіуса a з умовами першого роду
   $a)$ $u\big|_{r=a}=cos\theta+cos^2\theta$; $b)$ $u\big|_{r=a}=sin^2\theta+15sin^2\theta\,cos\theta\,cos2\varphi$;
   $c)$ $u\big|_{r=a}=1+sin\theta\,cos\varphi$; $d)$ $u\big|_{r=a}=1+sin\theta\,cos\theta\,sin\varphi+sin^5\theta\,cos5\varphi$.
11. Всередині кулі радіуса a з умовами другого роду
   $a)$ $u_r\big|_{r=a}=cos\theta$; $b)$ $u_r\big|_{r=a}=sin^3\theta\,sin3\varphi+sin\theta\,cos\varphi$; $c)$ $u_r\big|_{r=a}=sin^{10}\theta\,sin10\varphi$.
12. Всередині кулі радіуса a з умовами третього роду
   $a)$ $(u_r+hu)\big|_{r=a}=sin^2\theta$; $b)$ $(u_r+hu)\big|_{r=a}=1+sin^7\theta\,cos7\varphi$;
   $c)$ $(u_r+hu)\big|_{r=a}=sin\theta\,sin\varphi+sin\theta\,cos\theta\,cos\varphi$; $d)$ $(u_r+hu)\big|_{r=a}=1+cos^2\theta$.
13. Зовні кулі радіуса a з умовами першого роду
   $a)$ $u\big|_{r=a}=cos\theta+cos^2\theta$; $b)$ $u\big|_{r=a}=sin^2\theta+15sin^2\theta\,cos\theta\,cos2\varphi$;
   $c)$ $u\big|_{r=a}=1+sin\theta\,cos\varphi$; $d)$ $u\big|_{r=a}=1+sin\theta\,cos\theta\,sin\varphi+sin^5\theta\,cos5\varphi$.
14. Зовні кулі радіуса a з умовами другого роду
   $a)$ $u_r\big|_{r=a}=cos\theta$; $b)$ $u_r\big|_{r=a}=sin^3\theta\,sin3\varphi+sin\theta\,cos\varphi$; $c)$ $u_r\big|_{r=a}=sin^{10}\theta\,sin10\varphi$.
15. Всередині кульового шару $a \le r \le b$ і таку, що
   $a)$ $u\big|_{r=a}=0, u\big|_{r=b}=cos^3\theta$; $b)$ $u\big|_{r=a}=cos\theta, u\big|_{r=b}=0$; $c)$ $u_r\big|_{r=a}=0, u\big|_{r=b}=15\,sin^3\theta\,sin3\varphi$;
   $d)$ $u_r\big|_{r=a}=sin\theta\,sin\varphi, u_r\big|_{r=b}=3sin\theta\,cos\theta\,cos\varphi$; $e)$ $u\big|_{r=a}=cos^3\theta, u_r\big|_{r=b}=sin^2\theta\,cos2\varphi$.

Завдання 2: сформулювати крайову задачу і розв’язати її методом Фур’є:

1. Знайти стаціонарний розподіл температури в тонкій пластині, що має форму кругового сектора, радіуси якого підтримуються при температурі u_1, а дуга кола – при температурі u_2.

2. На границі тонкої пластини у формі кругового сектора $r \le a$, $0 \le \varphi \le \alpha$ задана температура $u = \begin{cases} f(\varphi), & r = a, \\ 0, & \varphi = 0, \varphi = \alpha. \end{cases}$ Знайти стаціонарне поле температури в пластині.
3. Знайти стаціонарний розподіл температури в твердому тілі, обмеженому нескінченними циліндричними поверхнями з радіусами a і b ($a<b$), якщо на поверхні циліндра $r=a$ підтримується стала температура u_0, на поверхні $r=b$ при $0<\varphi<\pi$ підтримується температура u_0, а при $\pi<\varphi<2\pi$ температура дорівнює нулю.
4. Знайти стаціонарний розподіл температури в однорідному циліндрі $0 \le r \le R$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le z \le l$, якщо нижня основа циліндра має температуру u_0, а вся інша поверхня підтримується при нульовій температурі.
5. Знайти стаціонарний розподіл температури в однорідному циліндрі $0 \le r \le R$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le z \le l$, якщо нижня основа циліндра має нульову температуру, верхня – теплоізольована, а температура бічної поверхні дорівнює $f(z)$.
6. Знайти стаціонарний розподіл температури в однорідному циліндрі $0 \le r \le R$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le z \le l$, якщо нижня основа циліндра має нульову температуру, бічна поверхня теплоізольована, а температура верхньої основи дорівнює $f(r)$.
7. Знайти стаціонарний розподіл температури в однорідному циліндрі $0 \le r \le R$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le z \le l$, якщо до нижньої основи підводиться сталий тепловий потік q, верхня основа підтримується при нульовій температурі, а на бічній поверхні проходить теплообмін з середовищем нульової температури.
8. Знайти стаціонарний розподіл температури в однорідному циліндрі $0 \le r \le R$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le z \le l$, якщо в циліндрі діють джерела тепла, об'ємна густина яких дорівнює Q. Температура поверхні циліндра дорівнює нулю.
9. Знайти стаціонарний розподіл температури всередині нескінченного кругового циліндра радіуса R, якщо на його поверхні підтримується температура $u|_{r=R} = u_0 \sin\varphi$ ($u_0=const$).
10. Знайти стаціонарний розподіл температури всередині однорідної прямокутної пластини $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$, якщо її сторони $x=a$, $0<y<b$ і $y=b$, $0<x<a$ теплоізольовані, а дві інші сторони $x=0$, $0<y<b$ і $y=0$, $0<x<a$ підтримуються при нульовій температурі. В пластині виділяється тепло густиною q.
11. Знайти розподіл потенціалу електростатичного поля всередині прямокутника $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$, в якому вздовж сторони $x=0$, $0<y<b$ потенціал дорівнює u_0, а три інші сторони заземлено. Електричні заряди всередині прямокутника відсутні.
12. Знайти стаціонарний розподіл температури всередині однорідної ізотропної кулі радіуса R, якщо на її поверхні підтримується температура

$$u|_{r=R} = \begin{cases} u_1, 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}, \\ u_2, \dfrac{\pi}{2} < \theta \le \pi. \end{cases}$$

13. Знайти стаціонарну температуру внутрішніх точок півкулі, якщо її поверхня підтримується при температурі u_0, а основа півкулі – при температурі, яка дорівнює нулю.
14. Знайти стаціонарну температуру внутрішніх точок кульового шару $1 \le r \le 2$, якщо на внутрішній сфері температура рівна $f_1 = \frac{1}{2} cos\,\theta$, а на зовнішній сфері – $f_2 = 1 + 2\,cos\,\theta$.
15. Сфера розділена шаром ізоляційної речовини на дві півсфери: верхню, заряджену до потенціалу u_1, і нижню, яка має потенціал u_2. Знайти потенціал даної сфери в будь-якій точці електростатичного поля.

Контрольна робота №10

Тема: *метод функцій Гріна розв'язання крайових задач для рівнянь Лапласа та Пуассона*

Завдання 1: використати метод електростатичних зображень для побудови функції Гріна відповідної крайової задачі у вказаній області:

1. Побудувати функцію Гріна задачі Діріхле для півпростору $x_1>0$ в R^3.
2. Побудувати функцію Гріна задачі Неймана для півпростору $x_2>0$ в R^3.
3. Побудувати функцію Гріна третьої крайової задачі для півпростору $x_3>0$ в R^3.
4. Побудувати функцію Гріна задачі Діріхле для двогранного кута $x_1>0$, $x_2>0$ в R^3.
5. Побудувати функцію Гріна задачі Діріхле для октанта $x_1>0$, $x_2>0$, $x_3>0$ в R^3.
6. Побудувати функцію Гріна задачі Діріхле для кулі $|x|<a$ в R^3.
7. Побудувати функцію Гріна задачі Діріхле для півкулі $|x|<a$, $x_3>0$ в R^3.
8. Побудувати функцію Гріна задачі Діріхле для чверті кулі $|x|<a$, $x_2>0$, $x_3>0$ в R^3.
9. Побудувати функцію Гріна задачі Діріхле для восьмої частини кулі $|x|<a$, $x_1>0$, $x_2>0$, $x_3>0$ в R^3.
10. Побудувати функцію Гріна задачі Діріхле для верхньої півплощини.
11. Побудувати функцію Гріна задачі Неймана для верхньої півплощини.
12. Побудувати функцію Гріна задачі Діріхле для круга радіуса a.
13. Побудувати функцію Гріна задачі Діріхле для верхнього півкруга радіуса a.
14. Побудувати функцію Гріна задачі Діріхле для частини простору, що міститься між паралельними площинами $x_3=0$ і $x_3=1$.
15. Побудувати функцію Гріна задачі Діріхле для частини простору, що міститься всередині двогранного кута $\alpha = \frac{\pi}{n}$, де n – натуральне число.

Завдання 2: використати метод конформних відображень для побудови функції Гріна задачі Діріхле для вказаної області в R^2:

1. Півплощина $Im\,z > 0$.
2. Півплощина $Re\,z > 0$.

3. Чверть півплощини $0 < arg\, z < \dfrac{\pi}{2}$.
4. Круг $|z| < R$.
5. Півкруг $|z| < R$, $Im\, z > 0$.
6. Чверть круга $|z| < R$, $0 < arg\, z < \dfrac{\pi}{2}$.
7. Круг $|z| < R$ з розрізом по відрізку [0,R].
8. Круг $|z - z_0| < R$.
9. Смуга $0 < Im\, z < \pi$.
10. Смуга $-\dfrac{\pi}{2} < Im\, z < \dfrac{\pi}{2}$.
11. Смуга $0 < Re\, z < 1$.
12. Півсмуга $0 < Im\, z < \pi$, $Re\, z > 0$.
13. Півсмуга $Im\, z < 0$, $0 < Re\, z < 1$.
14. Область $Re\, z > 0, |z| > R$.
15. Область $Im\, z > 0, |z| > R$.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Араманович И.Г., Левин В.И. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1969. – 288 с.
2. Арсенин В.Я. Методы математической физики и специальные функции. – М.: Наука, 1984. – 384 с.
3. Бицадзе А.В., Калиниченко А.В. Сборник задач по уравнениям математической физики. – М.: Наука, 1977. – 224 с.
4. Боголюбов А.Н., Кравцов В.В. Задачи по математической физике. – М.: Изд-во МГУ, 1998. – 350 с.
5. Будак В.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. Сборник задач по математической физике. – М.: Наука, 1972. – 687 с.
6. Вірченко Н.О. Основні методи розв’язання задач математичної фізики. – К., 1997. – 371 с.
7. Владимиров В.С. Сборник задач по уравнениям математической физики. – М.: Наука, 1974. – 272 с.
8. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1971. – 512 с.
9. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. – М.: Высшая школа, 1970. – 712 с.
10. Крикунов Ю.М. Лекции по уравнениям математической физики. – Казань: Казан. ун-т, 1970. – 209 с.
11. Очан Ю.С. Методы математической физики. – М.: Высшая школа, 1965. – 383 с.
12. Перестюк М.О., Маринець В.В. Теорія рівнянь математичної фізики. – К.: Либідь, 2001. – 336 с.
13. Положий Г.Н. Уравнения математической физики. – М.: Высшая школа, 1964. - 560 с.
14. Соболев С.Л. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1966. – 444 с.
15. Смирнов М.М. Задачи по уравнениям математической физики. – М.: Наука,1968. – 112 с.
16. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1977. – 724 с.

Навчальне видання

Вакал Євген Сергійович
Верьовкіна Ганна Володимирівна
Личман Валерій Васильович
Ловейкін Андрій В'ячеславович
Попов Валерій Вікторович

КОНТРОЛЬНІ ЗАВДАННЯ

з курсу "Рівняння математичної фізики"

для студентів механіко-математичного-факультету
заочної форми навчання

Авторська редакція