Київський національний університет імені Тараса Шевченка

# Методичні вказівки до практичних занять з дисципліни

# “Рівняння математичної фізики”

для студентів механіко-математичного факультету, які навчаються за напрямом підготовки "Механіка"

Київ – 2012

Методичні вказівки до практичних занять з дисципліни "Рівняння математичної фізики" для студентів механіко-математичного факультету, які навчаються за напрямом підготовки "Механіка" / Упорядники: А.В. Ловейкін, А.П. Креневич, Г.В. Верьовкіна

Рецензенти:

доктор фіз.-мат. наук, професор Маципура В.Т.

доктор фіз.-мат. наук, професор Мольченко Л.В.

Рекомендовано вченою радою механіко-математичного факультету протокол *№ 8* від *24 квітня 2012 р*.

## Вступ

Методичні вказівки підготовлені для підготовки та проведення практичних занять з нормативного курсу "Рівняння математичної фізики" для студентів механіко-математичного факультету, які навчаються за напрямом підготовки "Механіка". За діючим навчальним планом курс вивчається студентами-механіками протягом I та II семестрів III курсу.

Основною метою методичних вказівок є допомога під час підготовки до практичних занять, сприяння засвоєнню студентами основного матеріалу курсу "Рівняння математичної фізики" та його застосуванню при розв'язанні стандартних задач.

Весь матеріал відповідно до робочої програми розбито на чотири модулі, кожен з яких у свою чергу поділено на окремі теми. Кожен модуль завершується контрольною роботою, приклади яких наведено наприкінці кожного модуля. На початку кожної теми пропонується список контрольних запитань, які охоплюють теоретичний матеріал, необхідний при розв'язанні задач, далі наведено набір задач для аудиторної роботі та самостійної роботи студентів.

При підготовці до занять доцільно користуватись такими підручниками:


1. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1980.
2. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Дифференциальные уравнения математической физики. – М.: Физматгиз, 1962.
3. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. – М.: Высшая школа, 1970.
4. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1966.
5. Перестюк М.О., Маринець В.В. Теорія рівнянь математичної фізики. Курс лекцій. – К.: Либідь, 1993.


При підборі задач, наведених у методичних вказівках, були використані такі збірники задач:


1. Б.М. Будак, А.А. Самарский, А.Н. Тихонов. Сборник задач по математической физике. – М.: Наука, 1980.
2. Сборник задач по уравнениям математической физики. / Под ред. В.С. Владимирова. – М.: Наука, 1982.

# *Модуль 1.* Постановка задач математичної фізики. Класифікація лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними другого порядку

## Тема 1. Постановка задач. Фізичні процеси, які приводять до хвильових рівнянь

*Контрольні запитання*

1. Яке рівняння називається хвильовим?
2. Що таке початкові та крайові умови?
3. Яку структуру має крайова задача для хвильового рівняння?
4. Сформулюйте основні припущення, які використовуються під час вивчення малих повздовжніх коливань пружного стержня.
5. Сформулюйте II закон Н'ютона та закон Гука.
6. Сформулюйте основні припущення, які використовуються під час вивчення малих поперечних коливань струни.

*Задачі для аудиторної роботи*

1. Поставити задачу про вимушені малі повздовжні коливання пружного стержня сталого поперечного перерізу, які викликані дією зовнішньої сили, прикладеної до лівого кінця стержня. Правий кінець стержня пружно закріплений. В початковий момент часу точкам стержня були надані початкові відхилення, а початкові швидкості відсутні.
2. Поставити задачу про вільні коливання струни в середовищі з опором, пропорційним швидкості. Кінці струни жорстко закріплені. В початковий момент часу точкам струни надали початкові відхилення, а швидкості відсутні.
3. Поставити задачу про малі повздовжні коливання вертикально підвішеного однорідного пружного стержня, який знаходиться у полі сил тяжіння. Верхній кінець стержня закріплений жорстко, а нижній — вільний, але до нього прикріплено абсолютно жорсткий вантаж маси $M$. За положення рівноваги приймається ненапружений стан стержня (наприклад, в початковий момент часу з-під вантажу прибирають підставку і дія сил тяжіння починає розтягувати стержень).
4. Кусково-однорідний пружний стержень сталого поперечного перерізу складений з двох однорідних частин довжинами $l_1$ та $l_2$, які мають фізичні характеристики $\rho_1,\ E_1$ та $\rho_2,\ E_2$ відповідно. Поставити задачу про вимушені коливання цього стержня, причиною яких є зовнішні сили, прикладені до кінців стержня. В початковий момент часу стержень знаходився у стані спокою. Розглянути два випадки:
   а) однорідні частини з'єднані напряму;
   б) однорідні частини з'єднані через тонку абсолютно жорстку прокладку маси $M$.

*Задачі для самостійної роботи*

1. Поставити задачу про малі повздовжні коливання однорідного пружного стержня сталого поперечного перерізу, лівий кінець якого рухається за відомим законом, а правий — закріплений пружно. В початковий момент часу точкам стержня надано початкових швидкостей, початкові відхилення відсутні.
2. Поставити задачу про малі повздовжні коливання тонкого однорідного пружного стержня змінного поперечного перерізу. Лівий кінець стержня закріплений пружно, а на правий діє зовнішня сила. В початковий момент часу стержень перебував у стані спокою.
3. Верхній кінець тонкого однорідного стержня сталого поперечного перерізу прикріплено до стелі ліфту, який рухається зі швидкістю $v_0$. В момент часу $t = 0$ ліфт миттєво зупиняється. Поставити задачу про малі повздовжні коливання стержня.
4. Поставити задачу про малі повздовжні коливання однорідного пружного стержня, якщо один з його кінців закріплений жорстко, а на інший діє зовнішня сила опору, пропорційна швидкості.
5. Поставити задачу про малі повздовжні коливання однорідного пружного стержня з жорстко закріпленими кінцями, якщо з боку навколишнього середовища на нього діє зовнішня пружна сила, пропорційна відхиленню точок стержня. Обидва кінці стержня вільні. У початковий момент часу задані початкові відхилення та початкові швидкості точок стержня.
6. Поставити задачу про малі повздовжні коливання кусково-однорідного пружного стержня, однорідні частини якого з'єднані між собою через абсолютно жорстку прокладку маси $m_0$, на яку діє зовнішня сила $F(t)$. Лівий кінець стержня жорстко закріплений, правий — вільний. У початковий момент часу стержень перебував у стані спокою.
7. Поставити задачу про малі поперечні коливання струни довжини $l$ з жорстко закріпленими кінцями, якщо в точці $x_0$ ($0 < x_0 < l$) до струни прикріплено жорстку кулю маси $m_0$. Розглянути випадок, коли до кульки прикріплено пружину з жорсткістю $k_0$.

## Тема 2. Постановка задач. Фізичні процеси, які приводять до рівнянь теплопровідності

*Контрольні запитання*

1. Яке рівняння називається рівнянням теплопровідності?
2. Яку структуру має крайова задача для рівняння теплопровідності?
3. Сформулюйте основні принципи термодинаміки.
4. Сформулюйте закон Фур'є.
5. Сформулюйте основні припущення, які використовуються під час вивчення теплових процесів в стержні.

6. Сформулюйте закон Н'ютона, який описує конвективний теплообмін між тілом та навколишнім середовищем.

*Задачі для аудиторної роботи*

1. Поставити задачу про розподіл температури в тонкому однорідному провіднику сталого поперечного перерізу з теплоізольованою бічною поверхнею, через який проходить сталий електричний струм. Кінці провідника теплоізольовані. В початковий момент часу температура провідника нульова.
2. Поставити задачу про розподіл температури в тонкому однорідному стержні сталого поперечного перерізу, на бічній поверхні якого відбувається теплообмін з навколишнім середовищем відомої температури. На кінцях стержня підтримується температура навколишнього середовища. В початковий момент часу стержень нагрітий рівномірно до температури навколишнього середовища.
3. Поставити задачу про розподіл температури в тонкій однорідній проволоці з теплоізольованою бічною поверхнею, яка має форму кільця. Проволока нагрівається за допомогою внутрішніх джерел тепла. В початковий момент часу температура проволоки відома.
4. Кусково-однорідний стержень сталого поперечного перерізу складено з двох однорідних частин з різними фізичними характеристиками. Бічна поверхня стержня теплоізольована, а через кінці стержня подаються теплові потоки $q_1$ та $q_2$. В початковий момент часу температура точок стержня відома. Поставити задачу про розподіл температури в такому стержні. Розглянути два випадки:

   а) коли однорідні частини з'єднані напряму;

   б) коли однорідні частини з'єднані через масивну клему з високою теплопровідністю та теплоємністю $C_0$.

*Задачі для самостійної роботи*

1. Поставити задачу про розподіл температури в тонкому однорідному стержні сталого поперечного перерізу з теплоізольованою бічною поверхнею, на лівому кінці якого відома температура, а на правому відбувається теплообмін з навколишнім середовищем відомої температури. В початковий момент часу температура стержня задана.
2. Поставити задачу про розподіл температури в тонкому однорідному стержні сталого поперечного перерізу з теплоізольованою бічною поверхнею, всередині якого діють внутрішні джерела тепла. Кінці стержня теплоізольовані. У початковий момент часу температура стержня нульова.
3. Поставити задачу про розподіл температури в тонкому однорідному стержні сталого поперечного перерізу, на поверхні якого відбувається теплообмін із навколишнім середовищем нульової температури. На лівому кінці заданий тепловий потік, а на правому підтримується нульова температура. У початковий момент часу температура стержня нульова.
4. Поставити задачу про розподіл температури в тонкій однорідній про-

волоці, яка має форму кільця, а на бічній поверхні якої відбувається теплообмін з навколишнім середовищем відомої температури. Проволока нагрівається за допомогою внутрішніх джерел тепла. В початковий момент часу температура проволоки відома.

5. Поставити задачу про розподіл температури в тонкому однорідному провіднику сталого поперечного перерізу, на бічній поверхні якого відбувається теплообмін з навколишнім середовищем відомої температури, через який проходить сталий електричний струм. Кінці провідника затиснені у масивні клеми з високою теплопровідністю та теплоємностями $C_1$ та $C_2$. В початковий момент часу температура провідника нульова.
6. Поставити задачу про розподіл температури в тонкому кусково-однорідному стержні сталого поперечного перерізу з теплоізольованою бічною поверхнею, кінці якого підтримуються при нульовій температурі. Однорідні частини з'єднані між собою через піч з високою теплопровідністю, теплоємністю $C_0$ та потужністю $Q(t)$. У початковий момент часу температура стержня нульова.
7. Поставити задачу про розподіл температури в тонкому однорідному стержні змінного поперечного перерізу з теплоізольованою бічною поверхнею. На лівому кінці стержня відбувається теплообмін з навколишнім середовищем нульової температури, правий кінець — теплоізольований. В початковий момент часу температура стержня відома.
8. Однорідний стержень сталого поперечного перерізу з теплоізольованою бічною поверхнею та кінцями в початковий момент часу нагрітий до температури $u_0$. Поставити задачу про розподіл температури в такому стержні, якщо в кожній його точці внаслідок хімічної реакції поглинається кількість тепла, пропорційна температурі в цій точці.

## Тема 3. Постановка задач. Фізичні процеси, які приводять до рівнянь теплопровідності. Стаціонарні процеси

*Контрольні запитання*

1. Які рівняння називаються рівнянням теплопровідності, рівнянням Лапласа та Пуассона?
2. Чим принципово відрізняються крайові задачі, що описують стаціонарні фізичні процеси, від крайових задач, що описують нестаціонарні фізичні процеси?
3. Що таке потенціал швидкостей стаціонарної течії ідеальної нестисливої рідини?
4. Що таке потенціал електростатичного поля? Якій фізичний зміст крайових умов I та II роду для цього потенціалу?

*Задачі для аудиторної роботи*

1. Вивести рівняння, початкові та крайові умови, які виникають під час описання процесу розподілу температури в тонкій однорідній горизонтально розташованій пластині, верхня та нижня поверхні якої тепло-

ізольовані (передача тепла з навколишнього середовища можлива лише через край пластини). Розглянути випадок стаціонарного розподілу температури. Оремо розглянути стаціонарну задачу з крайовою умовою II роду. З фізичних міркувань вивести необхідну умову існування розв'язку.

2. Поставити задачу про розподіл температури в тонкій однорідній горизонтально розташованій пластині прямокутної форми, верхня поверхня якої теплоізольована, а через нижню подається сталий тепловий потік. На двох протилежних краях пластини відома температура, а два інших — теплоізольовані. В початковий момент часу температура пластини нульова.
3. Поставити задачу про стаціонарний розподіл температури в однорідному циліндрі радіуса $R$ та висоти $h$ (об'ємне тіло), якщо його верхня та нижня основи теплоізольовані, а на бічній поверхні підтримується стала температура $u_0$.
4. Поставити задачу про обтікання абсолютно твердого нескінченного кругового циліндру радіуса $R_0$ плоскою стаціонарною течією ідеальної нестисливої рідини, яка на нескінченності має швидкість $v_0$, напрямлену перпендикулярно до осі циліндра (зовнішня задача). Звернути увагу на наявність умови на нескінченності.
5. Поставити задачу про розподіл електростатичного поля всередині кулі радіуса $R_0$, в якій розміщено заряди з густиною $\rho$, поверхня якої заземлена. Яким може бути розв'язок задачі при $\rho \equiv 0$?
6. Зовні заземленої кулі радіуса $R_0$ розташовано точковий заряд величини $(+q)$. Поставити задачу про розподіл електростатичного поля зовні такої кулі. Який вигляд має умова на нескінченності?

*Задачі для самостійної роботи*

1. Поставити задачу про розподіл температури в тонкій однорідній горизонтально розташованій пластині прямокутної форми, на верхній та нижній основах якої відбувається теплообмін з навколишнім середовищем за законом Н'ютона. Край пластини теплоізольований. В початковий момент часу температура пластини відома. Розглянути стаціонарний випадок.
2. Поставити задачу про стаціонарний розподіл температури всередині нескінченного кругового циліндру радіуса $R_0$, якщо:
   а) на бічній поверхні задана температура;
   б) на бічній поверхні заданий тепловий потік.
3. Поставити задачу про обтікання твердої кулі радіуса $R_0$ стаціонарною течією ідеальної нестисливої рідини, яка на нескінченності має сталу швидкість $v_0$.
4. Поставити задачу про розподіл електростатичного поля всередині прямокутного паралелепіпеда, в якому розташовані заряди з густиною

$\rho$. Верхня та нижня основи паралелепіпеду заземлені, а всі інші зроблені з діелектрику.

5. Поставити задачу про розподіл електростатичного поля зовні заземленої кулі радіуса $R_0$, якщо за її межами в деякій точці розташовано точковий заряд величини $(-q)$.

## Тема 4. Класифікація та зведення до канонічного вигляду лінійних ДРЧП другого порядку зі сталими коефіцієнтами

*Контрольні запитання*

1. Як здійснюється класифікація лінійних ДРЧП 2-го порядку в точці?
2. Які типи рівнянь Ви знаєте?
3. Який вигляд має канонічна форма для кожного з типів рівнянь?
4. Як визначити заміну змінних, яка дозволяє звести рівняння до канонічної форми?
5. Чи можна для рівняння зі змінними коефіцієнтами, яке має більше двох незалежних змінних, побудувати заміну змінних, яка зведе його до канонічної форми в області, в якій тип рівняння зберігається?

*Задачі для аудиторної роботи*

Визначити тип рівняння та звести його до канонічної форми.

1. $4u_{xx} - 4u_{xy} - 2u_{yz} + u_y + u_z = 0$.
2. $u_{xx} + 2u_{xy} + 2u_{yy} + 4u_{yz} + 5u_{zz} + u_x + 2u_y = 0$.
3. $u_{xy} + u_{xz} + u_{yz} + u_y - u = 0$.
4. $u_{xx} - 2u_{xy} + 4u_{xz} + 2u_{yy} - 6u_{yz} + 9u_{zz} + u_x - u_y = 0$.
5. $u_{xx} + 2u_{xy} - 2u_{xz} + 2u_{yy} + 2u_{zz} = 0$.
6. $u_{xy} - u_{xz} + u_x + u_y - u_z = u$.
7. $u_{yy} - 3u_{xy} + u_{yz} - u_z + u_y = 0$.
8. $u_{xx} + u_{xy} - u_{xz} - u_{yz} - u_x + u_y - 5u = 0$.
9. $u_{xy} - u_{xt} + u_{zz} - 2u_{zt} + 2u_{tt} = 0$.
10. $u_{xx} + 2u_{xy} + 2u_{yy} + 2u_{yz} + 2u_{yt} + 2u_{zz} + 3u_{tt} = 0$.
11. $u_{x_1x_1} - a\sum_{k=2}^{m}(-1)^k u_{x_{k-1}x_k} = 0, \quad u = u(x_1, \ldots, x_m)$.

*Задачі для самостійної роботи*

Визначити тип рівняння та звести його до канонічної форми.

1. $u_{xx} - 4u_{xy} + 5u_{yy} + 2u_{yz} - 3u_{zz} = 0$.

2. $u_{xx} + 2u_{xy} - u_{yy} + 4u_{yz} + 6u_{zz} = 0.$

3. $u_{xx} + 5u_{yy} + 5u_{zz} + 4u_{xy} + 4u_{xz} + 8u_{yz} - u_x + 2u_z = 0.$

4. $4u_{xx} + 4u_{zz} - 4u_{xy} + 12u_{xz} - 8u_{yz} + 3u_y - 2u_z + 5u = 0.$

5. $u_{xx} - 4u_{xy} + 2u_{xz} + 4u_{yy} + u_{zz} = 0.$

6. $u_{xx} + 2u_{xy} - 2u_{xz} + 2u_{yy} + 2u_{zz} = 0.$

7. $2u_{yy} - u_{yz} + u_{xy} - u_z = 0.$

8. $u_{zz} + u_{xz} - u_{yz} + u_y - u_z + 2u = 0.$

9. $2u_{xy} + u_{yz} - 3u_y + u = 0.$

10. $u_{yy} - 2u_{xy} + 2u_{xz} - u_{yz} + 2u_x - 3u = 0$.

11. $u_{xy} + u_{xz} + u_{xt} + u_{zt} = 0.$

12. $u_{xy} + u_{xz} - u_{tx} - u_{yz} + u_{ty} + u_{tz} = 0.$

13. $u_{x_1x_1} + 2\sum_{k=2}^{m} u_{x_kx_k} - 2\sum_{k=1}^{m-1} u_{x_kx_{k-1}} = 0, \quad u = u(x_1,\ldots,x_m).$

14. $\sum_{k=1}^{m} k u_{x_kx_k} + 2\sum_{1\le i<j\le m} i u_{x_ix_j} = 0, \quad u = u(x_1,\ldots,x_m).$

## Тема 5. Класифікація та зведення до канонічного вигляду лінійних ДРЧП другого порядку з двома незалежними змінними

*Контрольні запитання*

1. Які типи рівнянь Ви знаєте? Як їх визначити?
2. Що таке характеристики рівняння? Скільки існує незалежних характеристик для кожного з типів рівнянь?
3. Як визначити заміну змінних, яка дозволяє звести рівняння до канонічної форми?
4. Який вигляд має канонічна форма для кожного з типів рівнянь?

*Задачі для аудиторної роботи*

Визначити тип та звести рівняння до канонічної форми в областях, де його тип зберігається.

1. $xu_{yy} + u_{xx} = 0.$

2. $y^2u_{xx} - u_{yy} = 0.$

3. $u_{yy} + xyu_{xy} = 0.$

4. $x^2u_{yy} + 2xyu_{xy} + (y^2 + 1)u_{xx} = 0.$

5. $y^2 u_{xx} + 2y u_{xy} + u_{yy} = 0.$

6. $e^{2y} u_{yy} - 4x e^y u_{xy} + 4x^2 u_{xx} = 0.$

7. $u_{yy} \cos^2 x - 2y \cos x \cdot u_{xy} + y^2 u_{xx} = 0.$

*Задачі для самостійної роботи*

Визначити тип та звести рівняння до канонічної форми в областях, де його тип зберігається.

1. $x u_{yy} + y u_{xx} = 0.$

2. $x^2 u_{yy} - y^2 u_{xx} = 0.$

3. $x^2 u_{xx} + y^2 u_{yy} = 0.$

4. $xy u_{xx} + u_{yy} = 0.$

5. $y^2 u_{xx} + 2xy u_{xy} + 2x^2 u_{yy} + y u_y = 0.$

6. $x^2 u_{xx} - e^{2y} u_{yy} = 0.$

7. $u_{xy} - y u_{yy} = 0.$

8. $u_{xx} - 2 u_{xy} \sin x - u_{yy} \cos^2 x = 0.$

9. $e^{2y} u_{yy} - 2e^y u_{xy} - 3 u_{xx} = 0.$

10. $e^{2y} u_{xx} + 2 e^y u_{xy} - 3 u_{yy} + 3 u_y = 0.$

11. $x^2 u_{yy} - 2xy u_{xy} + 2y^2 u_{xx} - \dfrac{2y^2}{x} u_x = 0.$

12. $u_{xx} + 2\sin x \cdot u_{xy} + (1 + \sin^2 x) u_{yy} + u_y \cos x = 0.$

13. $y^2 u_{xx} + 2xy u_{xy} + x^2 u_{yy} = 0.$

14. $y^2 u_{yy} - 2xy u_{xy} + x^2 u_{xx} = 0.$

15. $y^2 u_{xx} - 2y e^x u_{xy} + e^{2x} u_{yy} = 0.$

16. $\sin^2 x \cdot u_{yy} - 2y \sin x \cdot u_{xy} + y^2 u_{yy} = 0.$

17. $u_{yy} - 2\cos y \cdot u_{xy} + (2 - \sin^2 y) u_{xx} = 0.$

18. $u_{xx} - 2 u_{xy} + \sin^2 x \cdot u_{yy} = 0.$

## Приклад модульної контрольної роботи

1. Поставити задачу про розподіл температури в тонкому однорідному стержні сталого поперечного перерізу з теплоізольованою бічною поверхнею, всередині якого відсутні джерела тепла. Лівий кінець стержня теплоізольований, а на правому відбувається теплообмін з навколишнім середовищем нульової температури. В початковий момент часу стержень нагрітий рівномірно до температури $u_0$.
2. Пружний стержень складено з двох однакових однорідних частин довжинами $l$ та площею поперечного перерізу $S$. Однорідні частини з'єднані через тонку абсолютно жорстку прокладку маси $M$. Поставити задачу про вимушені коливання цього стержня, викликані зовнішньою силою, прикладеною до лівого кінці стержня. Правий кінець — жорстко закріплений. В початковий момент часу стержень знаходився у стані спокою.
3. Поставити задачу про плоский стаціонарний розподіл температури в нескінченному паралелепіпеді, поперечний переріз якого має форму квадрату зі стороною $a$. Дві прилеглі грані паралелепіпеду теплоізольовані, а дві інші підтримуються при сталій температурі $u_0$.
4. Визначити типи рівнянь та звести їх до канонічної форми

   а) $u_{xx} + 6u_{xy} - 3u_{xz} + u_x - u = 0$;

   б) $x^2 u_{yy} + \operatorname{sh}^2 y \cdot u_{xx} = 0, \quad x > 0, y > 0;$

   в) $u_{xx} + 2\sin x \cdot u_{xy} + \sin^2 x \cdot u_{yy} = 0, \quad x, y \in \mathbb{R}.$

# *Модуль 2.* Задача Коші для рівнянь гіперболічного типу

## Тема 6. Класична задача Коші для хвильового рівняння. Метод характеристик

*Контрольні запитання*

1. Яка функція називається загальним розв'язком диференціального рівняння 2-го порядку?
2. В чому полягає постановка класичної задачі Коші для хвильового рівняння?
3. Яка функція називається класичним розв'язком задачі Коші?
4. Сформулюйте теорему про єдиність класичного розв'язку задачі Коші.
5. У чому полягає основна ідея методу характеристик?

*Задачі для аудиторної роботи*

Знайти загальні розв'язки рівнянь

1. $u_{xy} = 0$.
2. $u_{xy} + a u_x = 0, \quad a = \mathrm{const}.$

3. $u_{xy} - a\,u_y = b\,xy, \quad a,b = \mathrm{const}.$

4. $u_{xy} + a u_x + b u_y + abu = c e^{x+y}, \quad a,b,c = \mathrm{const}.$

Розв’язати задачі Коші методом характеристик

1. $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \quad x \in \mathbb{R},\, t > 0;$

$u\big|_{t=0} = u_0 \sin(\alpha x), \quad u_t\big|_{t=0} = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$

2. $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 16a^2 \cos(x + at), \quad x \in \mathbb{R},\, t > 0;$

$u\big|_{t=0} = 0, \quad u_t\big|_{t=0} = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$

3. $u_{tt} - a^2 u_{xx} + 2\alpha(u_t - a\,u_x) = 0, \quad x \in \mathbb{R},\, t > 0;$

$u\big|_{t=0} = 0, \quad u_t\big|_{t=0} = v_0(x), \quad x \in \mathbb{R}.$

4. $u_{tt} - a^2 u_{xx} + 2\alpha\, u_t + \alpha^2 u = 0, \quad x \in \mathbb{R},\, t > 0;$

$u\big|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t\big|_{t=0} = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$

*Задачі для самостійної роботи*

Розв’язати задачі Коші методом характеристик

1. $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \quad x \in \mathbb{R},\, t > 0;$

$u\big|_{t=0} = 0, \quad u_t\big|_{t=0} = v_0 \big/ (1 + x^2), \quad x \in \mathbb{R}.$

2. $u_{tt} - a^2 u_{xx} = f_0 e^{x-at}, \quad x \in \mathbb{R},\, t > 0;$

$u\big|_{t=0} = 0, \quad u_t\big|_{t=0} = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$

3. $u_{tt} - a^2 u_{xx} + 2\alpha(u_t + a\,u_x) = 0, \quad x \in \mathbb{R},\, t > 0;$

$u\big|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t\big|_{t=0} = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$

4. $u_{tt} - a^2 u_{xx} + 2\alpha(u_t - a\,u_x) = f_0\, e^{-x-at}, \quad x \in \mathbb{R},\, t > 0;$

$u\big|_{t=0} = 0, \quad u_t\big|_{t=0} = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$

5. $u_{tt} - a^2 u_{xx} + 2\alpha\, u_t + \alpha^2 u = 0, \quad x \in \mathbb{R},\, t > 0;$

$u\big|_{t=0} = 0, \quad u_t\big|_{t=0} = v_0(x), \quad x \in \mathbb{R}.$

6. $u_{tt} - a^2 u_{xx} + \beta\, u_x - \dfrac{\beta^2}{4a^2} u = 0, \quad x \in \mathbb{R},\, t > 0;$

$u\big|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t\big|_{t=0} = v_0(x), \quad x \in \mathbb{R}.$

## Тема 7. Загальна постановка задачі Коші для рівнянь гіперболічного типу. Метод характеристик

*Контрольні запитання*

1. Яка функція називається загальним розв'язком диференціального рівняння 2-го порядку?
2. В чому полягає постановка класичної задачі Коші для хвильового рівняння?
3. У чому полягає основна ідея методу характеристик?

*Задачі для аудиторної роботи*

Розв'язати задачі Коші методом характеристик

1. $u_{xy} + u_x = 0, \quad x, y \in \mathbb{R};$

   $u\big|_{y=x} = \sin x, \quad u_y\big|_{y=x} = 1, \quad x \in \mathbb{R}.$

2. $u_{yy} - u_{xy} + u_y = 0, \quad x, y \in \mathbb{R};$

   $u\big|_{y=0} = 0, \quad u_y\big|_{y=0} = v_0(x), \quad x \in \mathbb{R}.$

3. $u_{xx} - 4u_{xy} + 3u_{yy} - 4(u_x - u_y) = 16e^{2y}, \quad x, y \in \mathbb{R};$

   $u\big|_{x=0} = 0, \quad u_x\big|_{x=0} = 0, \quad y \in \mathbb{R}.$

4. $u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} = 2, \quad x, y \in \mathbb{R};$

   $u\big|_{y=0} = 0, \quad u_y\big|_{y=0} = x + \cos x, \quad 0 \le x \le 2.$

5. $xu_{xx} - u_{yy} + \dfrac{1}{2}u_x = 0, \quad x > 0;$

   $u\big|_{y=0} = x, \quad u_y\big|_{y=0} = 0, \quad 0 < x \le 1.$

6. $xu_{xy} - yu_{yy} - u_y = 2x^3, \quad x > 0;$

   $u\big|_{y=x} = \sin x, \quad u_x\big|_{y=x} = \cos x, \quad x \ge 1.$

*Задачі для самостійної роботи*

Розв'язати задачі Коші методом характеристик

1. $u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} = 0, \quad x, y \in \mathbb{R};$

   $u\big|_{y=0} = 3x^2, \quad u_y\big|_{y=0} = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$

2. $u_{xx} - u_{xy} + u_x = 2e^{-x-y}, \quad x, y \in \mathbb{R};$

   $u\big|_{x=0} = 0, \quad u_x\big|_{x=0} = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$

3. $u_{xx} + 4u_{xy} - 5u_{yy} + u_x - u_y = 0, \quad x, y \in \mathbb{R};$

$$u\Big|_{y=0} = -e^{2x}, \quad u_y\Big|_{y=0} = 2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

4. $u_{xx} - u_{yy} - 2(u_x + u_y) = 4, \quad x, y \in \mathbb{R};$

$$u\Big|_{x=0} = -y, \quad u_x\Big|_{x=0} = y - 1, \quad y \in \mathbb{R}.$$

5. $u_{xx} - 4x^2 u_{yy} - \dfrac{1}{x} u_x = 0, \quad x > 0;$

$$u\Big|_{x=1} = y^2 + 1, \quad u_x\Big|_{x=1} = 4, \quad |y| \le 1.$$

6. $2u_{xy} - e^{-x} u_{yy} = 4x, \quad x, y \in \mathbb{R};$

$$u\Big|_{y=x} = x^5 \cos x, \quad u_y\Big|_{y=x} = x^2 + 1, \quad x \ge 0.$$

## Тема 8. Якісна картина розповсюдження коливань у одновимірних середовищах. Зосереджені фактори

*Контрольні запитання*

1. В чому полягає постановка класичної задачі Коші для хвильового рівняння?
2. Що називається класичним розв’язком задачі Коші?
3. Що називається узагальненим розв’язком задачі Коші?
4. Запишіть формулу д’Аламбера.

*Задачі для аудиторної роботи*

Параметр $a$, який використовується при формулюванні задач даного заняття, — це параметр, що визначає коефіцієнт хвильового рівняння $u_{tt} - a^2 u_{xx} = f$.

1. В початковий момент часу необмежена струна збурена початковими відхиленнями, зображеними на Рис. 1, початкові швидкості відсутні. Зобразити профіль струни у моменти часу $t = {kl}/{(4a)}$, $k = 0, 1, 2, 4, 6$.

   В площині $Oxt$ зобразити фазовий портрет явища.

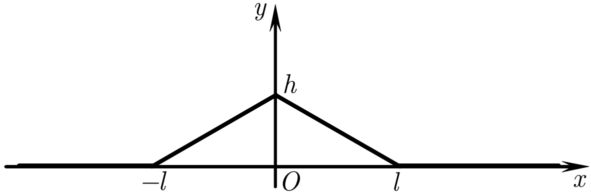


**Рис. 1**

2. Зобразити фазовий портрет процесу розповсюдження коливань у не-

скінченній струні, які викликані початковими відхиленнями, зосередженими на проміжках $(l,2l)$ та $(-3l,-2l)$. Охарактеризувати кожну зону цього портрету.

3. В початковий момент часу $t = 0$ необмежена струна отримує поперечний удар в точці $x = 0$, який передає їй імпульс $I$. Знайти відхилення точок струни від положень рівноваги при $t > 0$. В площині $Oxt$ зобразити фазовий портрет явища. (Спочатку розглянути випадок, коли імпульс $I$ генерує в струні швидкості, рівномірно розподілені по проміжку $-\varepsilon < x < \varepsilon$, а потім перейти до границі при $\varepsilon \to 0+$.)

4. В початковий момент часу точки необмеженої струни знаходились в стані спокою. З моменту часу $t = 0$ в точці $x = 0$ починає діяти зовнішня поперечна сила інтенсивності $f(t)$. Визначити формули, за якими визначається профіль струни в кожен момент часу $t > 0$. З'ясувати фізичну картину розповсюдження коливань. В площині $Oxt$ зобразити фазовий портрет явища. (Спочатку розглянути випадок, коли сила рівномірно розподілена по проміжку $-\varepsilon < x < \varepsilon$, а потім перейти до границі при $\varepsilon \to 0+$.)

*Задачі для самостійної роботи*

1. В початковий момент часу необмежена струна збурена початковими відхиленнями, зображеними на Рис. 2. В який момент часу $t > 0$ і в якій точці $x$ відхилення струни буде максимальним? Яка величина цього відхилення?

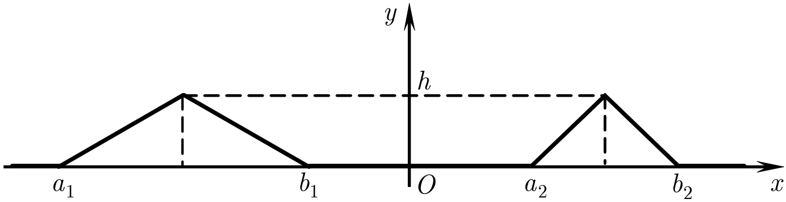


**Рис. 2**

2. В початковий момент часу нескінченна струна збурена початковими швидкостями, які рівномірно розподілені по відрізку $(-l,l)$ (за межами цього проміжку швидкості нульові), початкові відхилення відсутні. Зобразити профіль струни у моменти часу $t = kl/(4a)$, $k = 0,1,2,4,6$. В площині $Oxt$ зобразити фазовий портрет явища.

3. Зобразити фазовий портрет процесу розповсюдження коливань у нескінченній струні, які викликані початковими швидкостями, зосередженими на проміжках $(l,2l)$ та $(-3l,-2l)$. Охарактеризувати кожну зону цього портрету.

4. Вздовж необмеженої струни рухається хвиля $\varphi(x - at)$. Прийнявши цю хвилю за початкове збурення струни в момент часу $t = 0$, знайти

стан струни при $t > 0$.

5. В початковий момент часу $t = 0$ необмежена струна отримує поперечний удар в точці $x_0$, який передає їй імпульс $I$, напрямлений вздовж осі $Oy$, а в точці $(-x_0)$ — удар, який передає їй імпульс $I$, напрямлений проти осі $Oy$. Знайти відхилення точок струни від положень рівноваги при $t > 0$. В площині $Oxt$ зобразити фазовий портрет явища.
6. В початковий момент часу точки необмеженої струни знаходились в стані спокою. З моменту часу $t = 0$ в точках $x_0$ та $(-x_0)$ починають діяти зовнішні поперечні сили інтенсивності $F_0 \sin(\omega t)$. Визначити формули, за якими визначається профіль струни в кожен момент часу $t > 0$. З'ясувати фізичну картину розповсюдження коливань. В площині $Oxt$ зобразити фазовий портрет явища. Визначити закон, за яким рухається точка $x = 0$.

## Тема 9. Крайові задачі для хвильового рівняння у напівобмежених областях

*Контрольні запитання*

1. В чому полягає постановка крайових задач для напівобмежених струни або стержня?
2. Що називається класичним розв'язком крайової задачі?
3. Яка основна ідея методу продовження?
4. Запишіть формулу д'Аламбера.
5. Що називається класичним розв'язком рівняння з частинними похідними? Запишіть розв'язок д'Аламбера.

*Задачі для аудиторної роботи*

Параметр $a$, який використовується при формулюванні задач даного заняття — це параметр, що визначає коефіцієнт хвильового рівняння $u_{tt} - a^2 u_{xx} = f$.

1. Напівобмежену струну з жорстко закріпленим кінцем в початковий момент часу збурили початковими відхиленнями, які зображені на

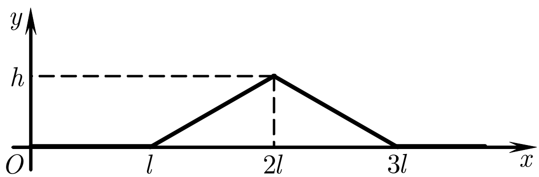


**Рис. 3**

**Ошибка! Источник ссылки не найден.**. Накреслити профіль струни в моменти часу $t = kl/(2a)$, $k = 1,2,3,5$. З'ясувати фізичну картину розповсюдження коливань. Зобразити фазовий портрет явища.

2. Напівобмеженому пружному стержню з вільним кінцем $x = 0$ в початковий момент часу надали початкову швидкість, яка дорівнює $V_0 = \mathrm{const}$ на відрізку $l \le x \le 3l$ і нулю зовні цього відрізка. Зобразити графіки повздовжніх відхилень точок стержня від їх положень рівноваги в моменти часу $t = kl/a$, $k = 1,2,3,5$. З'ясувати фізичну картину розповсюдження коливань. Зобразити фазовий портрет явища.

Використовуючи розв'язок д'Аламбера, розв'язати крайові задачі та з'ясувати: за яких умов вони матимуть класичний розв'язок.

3. $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \quad x > 0,\ t > 0;$

$u\big|_{t=0} = 0, \quad u_t\big|_{t=0} = 0, \quad x \ge 0;$

$u\big|_{x=0} = (at)^2 (A\,e^{-\alpha a t} + B\,e^{-\beta a t}), \quad t \ge 0.$

4. $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \quad x > 0,\ t > 0;$

$u\big|_{t=0} = U_0 e^{-\alpha x}, \quad u_t\big|_{t=0} = 0, \quad x \ge 0 \quad (\alpha > 0);$

$u_x\big|_{x=0} = F_1 \cos(\omega t) + F_2 \sin(\omega t), \quad t \ge 0 \quad (\omega > 0).$

5. $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \quad x > 0,\ t > 0;$

$u\big|_{t=0} = 0, \quad u_t\big|_{t=0} = (A\,t + B)e^{-t}, \quad x \ge 0;$

$(u_x - hu)\big|_{x=0} = 0, \quad t \ge 0 \quad (h > 0).$

*Задачі для самостійної роботи*

1. Напівобмежену струну з жорстко закріпленим кінцем в початковий момент часу надали початкову швидкість, яка дорівнює $\mathrm{v}_0 = \mathrm{const}$ на відрізку $l \le x \le 3l$ і нулю зовні цього відрізка. Накреслити профіль струни в моменти часу $t = kl/a$, $k = 1,2,3,5$. З'ясувати фізичну картину розповсюдження коливань. Зобразити фазовий портрет явища.

2. Напівобмежений пружний стержень з вільним кінцем $x = 0$ збурений в початковий момент часу $t = 0$ повздовжніми відхиленнями, профіль яких зображений на **Ошибка! Источник ссылки не найден.**. Знайти, в

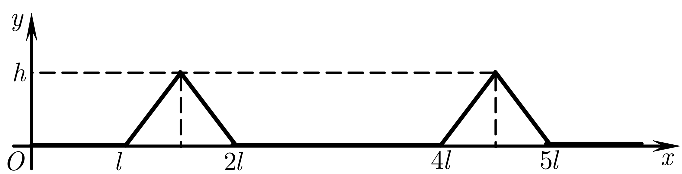


**Рис. 4**

яких точках і у які моменти часу $t > 0$ відхилення будуть максимальними. Яка величина цього відхилення?

3. Напівобмеженому пружному стержню з вільним кінцем $x = 0$ в початковий момент часу за допомогою повздовжнього удару по кінцю передається імпульс $I$ (спочатку розглянути випадок, коли імпульс рівномірно розподіляється по проміжку $0 \le x \le \varepsilon$, а потім $\varepsilon \to 0+$). Знайти відхилення точок стержня від положень рівноваги. Зобразити фазовий портрет явища.

Використовуючи розв'язок д'Аламбера, розв'язати крайові задачі та з'ясувати: за яких умов вони матимуть класичний розв'язок.

4. $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \quad x > 0,\, t > 0;$

$$u\Big|_{t=0} = 0, \quad u_t\Big|_{t=0} = 0, \quad x \ge 0;$$
$$u_x\Big|_{x=0} = t(A\,e^{-t} + B\,e^{-2t}), \quad t \ge 0.$$

5. $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \quad x > 0,\, t > 0;$

$$u\Big|_{t=0} = 0, \quad u_t\Big|_{t=0} = V_0 e^{-\alpha x}, \quad x \ge 0 \quad (\alpha > 0);$$
$$u\Big|_{x=0} = U_1 \cos(\omega t) + U_2 \sin(\omega t), \quad t \ge 0 \quad (\omega > 0).$$

6. $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \quad x > 0,\, t > 0;$

$$u\Big|_{t=0} = \frac{U_0}{x^2 + b^2}, \quad u_t\Big|_{t=0} = \frac{V_0}{x + b}, \quad x \ge 0 \quad (b > 0);$$
$$u\Big|_{x=0} = U_1 e^{-\alpha t} + U_2 e^{-\beta t}, \quad t \ge 0 \quad (\alpha, \beta > 0, \alpha \ne \beta).$$

7. $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \quad x > 0,\, t > 0;$

$$u\Big|_{t=0} = U_0 e^{-\alpha x}, \quad u_t\Big|_{t=0} = \frac{V_0}{x^2 + b^2}, \quad x \ge 0 \quad (\alpha, b > 0);$$
$$u_x\Big|_{x=0} = F_0 \cos(\omega t), \quad t \ge 0 \quad (\omega > 0).$$

8. $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \quad x > 0,\, t > 0;$

$$u\Big|_{t=0} = 0, \quad u_t\Big|_{t=0} = v_0(x), \quad x \ge 0;$$
$$(u_x - hu)\Big|_{x=0} = 0, \quad t \ge 0 \quad (h > 0).$$

## Приклад модульної контрольної роботи

1. Розв'язати задачу Коші методом характеристик
$4\,u_{tt} - u_{xx} = 4\sin(t - 2x), \quad x \in \mathbb{R},\, t > 0;$

$$u\Big|_{t=0} = 0, \quad u_t\Big|_{t=0} = -\frac{1}{4}\cos(2x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

2. Розв'язати задачу Коші методом характеристик

$$u_{yy} + 4u_{xy} - 5u_{xx} + 2(u_y - u_x) = 0, \quad x, y \in \mathbb{R};$$

$$u\Big|_{y=2x} = \frac{1}{8}e^{8x} + \sin(3x) - 2,$$

$$u_y\Big|_{y=2x} = e^{8x} - \cos(3x), \quad 0 \le x \le \frac{1}{3}.$$

3. Необмежена струна в початковий момент часу була збурена початковими відхиленнями, зображеними на **Ошибка! Источник ссылки не**

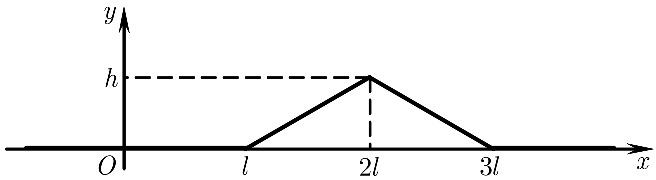


**Рис. 5**

**найден.**, початкові швидкості нульові. У площині $Oxt$ зобразити фазовий портрет розповсюдження коливань у струні. Використовуючи цей портрет, описати поведінку точки струни із координатою $x = 0$. У який момент часу відхилення цієї точки буде максимальним?

9. Використовуючи розв'язок д'Аламбера, розв'язати крайову задачу:

$$u_{tt} - 4u_{xx} = 0, \quad x > 0,\ t > 0;$$

$$u\Big|_{t=0} = U_0 e^{-x}, \quad u_t\Big|_{t=0} = V_0 e^{-2x}, \quad x \ge 0;$$

$$u\Big|_{x=0} = e^{-2t}(F_0 + F_1 t), \quad t \ge 0.$$

З'ясувати: за яких умов вона матиме класичний розв'язок.

# *Модуль 3.* Метод Фур'є розв'язання крайових задач для нестаціонарних рівнянь.

## Тема 10. Крайові задачі для однорідних нестаціонарних рівнянь на відрізку

*Контрольні запитання*

1. В чому полягає постановка крайових задач для хвильового рівняння та рівняння теплопровідності? Який їх фізичний зміст?
2. Що називається класичним розв'язком крайової задачі для хвильового рівняння та рівняння теплопровідності?
3. Що таке узагальнений розв'язок крайової задачі для хвильового рівняння та рівняння теплопровідності?

4. В чому полягає схема методу Фур'є для однорідного рівняння (схема 1)?

*Задачі для аудиторної роботи*

Використовуючи метод Фур'є, розв'язати задачі.

1. $u_t - a^2 u_{xx} = 0, \quad 0 < x < l,\ t > 0;$

$u\big|_{x=0} = 0, \quad u_x\big|_{x=l} = 0, \quad t \ge 0;$

$u\big|_{t=0} = U_0 x(2l - x), \quad 0 \le x \le l.$

2. $u_{tt} + 2b u_t - a^2 u_{xx} = 0, \quad 0 < x < l,\ t > 0 \quad (b > 0);$

$u_x\big|_{x=0} = 0, \quad u\big|_{x=l} = 0, \quad t \ge 0;$

$u\big|_{t=0} = A_1 \cos\dfrac{\pi x}{2l} + A_2 \cos\dfrac{3\pi x}{2l},\ u_t\big|_{t=0} = 0, \quad 0 \le x \le l.$

3. Знайти вільні коливання однорідного пружного стержня, лівий кінець якого жорстко закріплений, а правий — пружно, якщо в початковий момент часу його точкам були надані початкові швидкості, а початкові відхилення відсутні.

*Задачі для самостійної роботи*

Використовуючи метод Фур'є, розв'язати задачі.

1. Знайти вільні коливання струни $0 \le x \le l$ з жорстко закріпленими кінцями, якщо в початковий момент часу точкам струни були передані початкові швидкості $v_0(x) = V_0 x(l - x)$, $0 \le x \le l$. Початкові відхилення точок струни нульові.

2. $u_{tt} + 2u_t - u_{xx} = 0, \quad 0 < x < 1/2,\ t > 0;$

$u\big|_{x=0} = 0, \quad u_x\big|_{x=1/2} = 0, \quad t \ge 0;$

$u\big|_{t=0} = \sin(\pi x) - \sin(3\pi x),$

$u_t\big|_{t=0} = 2\sin(5\pi x) + \sin(7\pi x), \quad 0 \le x \le 1/2.$

3. $u_t - 4u_{xx} = 0, \quad 0 < x < \pi/2,\ t > 0;$

$u_x\big|_{x=0} = 0, \quad u\big|_{x=\pi/2} = 0, \quad t \ge 0;$

$u\big|_{t=0} = 4\cos x - 2\cos(5x), \quad 0 \le x \le \pi/2.$

4. $u_{tt} - 9u_{xx} + 2u = 0, \quad 0 < x < 1,\ t > 0;$

$u_x\big|_{x=0} = 0, \quad u_x\big|_{x=1} = 0, \quad t \ge 0;$

$$u\Big|_{t=0} = x^2(1-x)^2, \qquad u_t\Big|_{t=0} = 0, \quad 0 \le x \le 1.$$

5. Визначити розподіл температури в однорідному стержні сталого поперечного перерізу з теплоізольованою бічною поверхнею, якщо його лівий кінець теплоізольований, а на правому відбувається теплообмін з навколишнім середовищем нульової температури. В початковий момент часу стержень нагрітий рівномірно до температури $U_0$.

## Тема 11. Крайові задачі для неоднорідних нестаціонарних рівнянь на відрізку

*Контрольні запитання*

1. В чому полягає постановка крайових задач для хвильового рівняння та рівняння теплопровідності? Який їх фізичний зміст?
2. Що називається класичним розв'язком крайової задачі для хвильового рівняння та рівняння теплопровідності?
3. Що таке узагальнений розв'язок крайової задачі для хвильового рівняння та рівняння теплопровідності?
4. В чому полягає схема методу Фур'є для неоднорідного рівняння (схема 2)?

*Задачі для аудиторної роботи*

Використовуючи метод Фур'є, розв'язати задачі.

1. Визначити поперечні коливання струни $0 \le x \le l$ з жорстко закріпленими кінцями в середовищі з опором, пропорційним швидкості, яка знаходиться під дією зовнішньої рівномірно розподіленої періодичної сили з густиною $f_0 \sin(\omega t)$, $t > 0$. В початковий момент часу струна знаходилась у стані спокою. Показати, що при $t \to +\infty$ власні коливання струни затухають, і залишаються коливання на частоті зовнішньої сили. Чи можливе в даній системі явище резонансу?

2. $$u_t - a^2 u_{xx} = Q_0 t + Q_1 e^{-\beta t}\cos\frac{\pi x}{l}, \quad 0 < x < l,\ t > 0;$$
$$u_x\Big|_{x=0} = 0, \quad u_x\Big|_{x=l} = 0, \quad t \ge 0;$$
$$u\Big|_{t=0} = U_0, \quad 0 \le x \le l.$$

3. $$u_{tt} - a^2 u_{xx} = F(x), \quad 0 < x < l, t > 0;$$
$$u\Big|_{t=0} = u_0(x), \qquad u_t\Big|_{t=0} = v_0(x), \quad 0 \le x \le l;$$

а) $u\Big|_{x=0} = 0, \qquad u_x\Big|_{x=l} = 0, \quad t \ge 0;$

б) $u_x\Big|_{x=0} = 0, \qquad u_x\Big|_{x=l} = 0, \quad t \ge 0.$

Показати, що у випадку а) вихідну крайову задачу можна звести до розв'язання еквівалентної задачі, але для однорідного рівняння, а у випадку б) цього зробити неможна.

*Задачі для самостійної роботи*

Використовуючи метод Фур'є, розв'язати задачі.

1. Визначити малі повздовжні коливання тонкого однорідного пружного стержня $0 \le x \le l$ сталого поперечного перерізу, на який діють зовнішні сили із масовою густиною $F \cdot (l - x)\cos(\omega t)$, $t > 0$, $0 < x < l$, якщо лівий кінець стержня вільний, а правий — жорстко закріплений. У початковий момент часу стержень перебував у стані спокою.
2. Визначити розподіл температури в тонкому однорідному стержні $0 \le x \le l$ сталого поперечного перерізу, в якому діють внутрішні джерела тепла з масовою густиною $Qte^{-\alpha t}\left(1 + \cos(\pi x/l)\right)$, $t > 0$, $0 < x < l$. Кінці стержня теплоізольовані. В початковий момент часу стержень був нагрітий рівномірно до температури $U_0$.
3. $u_{tt} + 4u_t - 9u_{xx} = 2\cos(2t)\sin(2x), \quad 0 < x < \pi, t > 0;$

$$u\big|_{x=0} = 0, \quad u\big|_{x=\pi} = 0, \quad t \ge 0;$$
$$u\big|_{t=0} = 0, \qquad u_t\big|_{t=0} = -\sin x \quad 0 \le x \le \pi.$$

4. $u_t - 2u_{xx} + u = (t+1)\sin(3\pi x) - e^{-2t}\sin(5\pi x)$,

$$0 < x < 1/2, \; t > 0;$$
$$u\big|_{x=0} = 0, \quad u_x\big|_{x=1/2} = 0, \quad t \ge 0;$$
$$u\big|_{t=0} = 2\sin(5\pi x), \quad 0 \le x \le 1/2.$$

## Тема 12. Крайові задачі для нестаціонарних рівнянь на відрізку. Неоднорідні крайові умови

*Задачі для аудиторної роботи*

Використовуючи метод Фур'є, розв'язати задачі.

1. Визначити повздовжні коливання однорідного пружного стержня $0 \le x \le l$ сталого поперечного перерізу, якщо його лівий кінець жорстко закріплений, а на правий діє зовнішня періодична сила $F\sin(\omega t)$, $t \ge 0$. В початковий момент часу стержень перебував у стані спокою.
2. Визначити розподіл температури в тонкому однорідному стержні $0 \le x \le l$ сталого поперечного перерізу з теплоізольованою бічною поверхнею. На лівому кінці стержня заданий тепловий потік $q_0 e^{-\alpha t}$, $t \ge 0$,

а правий кінець — теплоізольований. В початковий момент часу стержень нагрітий рівномірно до нульової температури.

*Задачі для самостійної роботи*

Використовуючи метод Фур'є, розв'язати задачі.

1. Визначити малі повздовжні коливання однорідного пружного стержня $0 \le x \le l$ сталого поперечного перерізу в середовищі з опором, пропорційним швидкості. На правий кінець стержня діє зовнішня сила $F\cos(\omega t)$, $t \ge 0$, а лівий — жорстко закріплений. В початковий момент часу стержень перебував у стані спокою.
2. Знайти розподіл температури в тонкому однорідному стержні $0 \le x \le l$ сталого поперечного перерізу з теплоізольованою бічною поверхнею, якщо на його лівому кінці підтримується температура $u_1(t) = U_0 + U_1 t$, $t \ge 0$, а правий кінець теплоізольований. У початковий момент часу стержень нагрітий рівномірно до температури $U_0$.
3. $$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \quad 0 < x < l,\ t > 0;$$
$$u_x\Big|_{x=0} = 0, \quad u_x\Big|_{x=l} = F\sin(\omega t), \quad t \ge 0;$$
$$u\Big|_{t=0} = 0, \quad u_t\Big|_{t=0} = \frac{F\omega^2}{2l}x^2, \quad 0 \le x \le l.$$
4. $$u_t - a^2 u_{xx} = 0, \quad 0 < x < l,\ t > 0;$$
$$u\Big|_{x=0} = Ute^{-\alpha t}, \quad u\Big|_{x=l} = 0, \quad t \ge 0;$$
$$u\Big|_{t=0} = 0, \quad 0 \le x \le l.$$

## Тема 13. Крайові задачі для нестаціонарних рівнянь у прямокутних областях

*Задачі для аудиторної роботи*

Використовуючи метод Фур'є, розв'язати задачі.

1. $$u_{tt} - a^2 \Delta u = 0, \quad 0 < x < l_1,\ 0 < y < l_2,\ t > 0;$$
$$u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=l_1} = 0, \quad 0 < y < l_2,\ t \ge 0;$$
$$u\Big|_{y=0} = u\Big|_{y=l_2} = 0, \quad 0 < x < l_1,\ t \ge 0;$$
$$u\Big|_{t=0} = U_0\, x(l_1 - x)y(l_2 - y), \qquad u_t\Big|_{t=0} = 0,$$
$$0 \le x \le l_1,\ 0 \le y \le l_2.$$
2. Визначити розподіл температури в тонкій однорідній пластині сталої товщини $0 \le x \le l$, $0 \le y \le l$, у якої ребра $x = 0$ та $x = l$ тепло-

ізольовані, а ребра $y=0$ та $y=l$ підтримується при нульовій температурі. В початковий момент часу температура пластини дорівнює $u_0(x,y)=\sum_{k=1}^{N} A_k \sin\left(\pi k/l\right)\cos\left(\pi(k-1)/l\right)$, $0\le x\le l$, $0\le y\le l$.

*Задачі для самостійної роботи*

Використовуючи метод Фур'є, розв'язати задачі.

1. Визначити малі поперечні коливання тонкої квадратної мембрани $0\le x\le l$, $0\le y\le l$ з жорстко закріпленою межею, якщо в початковий момент часу по мембрані вдарив молоточок, який передав точкам мембрани імпульс $I$, рівномірно розподілений по ділянці $|x-l/2|\le\varepsilon$, $|y-l/2|\le\varepsilon$ $(0<\varepsilon<l/2)$. Початкові відхилення точок мембрани нульові.

2. $$u_t-a^2\Delta u=0,\quad 0<x<l_1,\, 0<y<l_2,\, t>0;$$
$$u_x\big|_{x=0}=u_x\big|_{x=l_1}=0,\quad 0<y<l_2,\, t\ge 0;$$
$$u\big|_{y=0}=u_y\big|_{y=l_2}=0,\quad 0<x<l_1,\, t\ge 0;$$
$$u\big|_{t=0}=\sum_{k=0}^{N} A_k\cos\frac{\pi k x}{l_1}\sin\frac{\pi(2k+1)y}{2l_2},\quad 0\le x\le l_1,\, 0\le y\le l_2.$$

3. $$u_t-a^2\Delta u=Qte^{-\alpha t}\sin\frac{\pi x}{l}\cos\frac{2\pi y}{l},\quad 0<x,y<l,\, t>0;$$
$$u\big|_{x=0}=u\big|_{x=l}=0,\quad 0<y<l,\, t\ge 0;$$
$$u_y\big|_{y=0}=u_y\big|_{y=l}=0,\quad 0<x<l,\, t\ge 0;$$
$$u\big|_{t=0}=U_0\sin\frac{2\pi x}{l}\cos\frac{\pi y}{l},\quad 0\le x,y\le l.$$

## Тема 14. Крайові задачі для нестаціонарних рівнянь у сферичних областях. Сферично симетричний випадок

*Контрольні запитання*

1. Що таке криволінійні координати?
2. Як записати оператор Лапласа в криволінійних координатах?
3. Як визначаються сферичні координати в просторі? Які їх особливості?
4. Запишіть оператор Лапласа у сферичних координатах.

*Задачі для аудиторної роботи*

Використовуючи метод Фур'є, розв'язати задачі.

1. $u_t - a^2 \Delta u = 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 < r_0^2,\ t > 0;$

$$u\Big|_{x^2+y^2+z^2=r_0^2} = 0, \quad t \ge 0;$$

$$u\Big|_{t=0} = U_0\left(1 - \frac{\rho}{r_0}\right), \quad \rho \le r_0, \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

2. $u_{tt} - a^2 \Delta u = 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 < r_0^2,\ t > 0;$

$$\left.{\partial u}\middle/{\partial \vec{\nu}}\right|_{x^2+y^2+z^2=r_0^2} = 0, \quad t \ge 0;$$

$$u\Big|_{t=0} = 0, \quad u_t\Big|_{t=0} = V_0\left(1 - \frac{\rho}{r_0}\right)^2, \quad \rho^2 = x^2 + y^2 + z^2 \le r_0^2,$$

$\vec{\nu}$ — одинична зовнішня нормаль до сфери $x^2 + y^2 + z^2 = r_0^2$.

3. $u_t - a^2 \Delta u = 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 < r_0^2,\ t > 0;$

$$u\Big|_{x^2+y^2+z^2=r_0^2} = U_0 e^{-\alpha t}, \quad t \ge 0;$$

$$u\Big|_{t=0} = U_0, \quad x^2 + y^2 + z^2 \le r_0^2.$$

*Задачі для самостійної роботи*

Використовуючи метод Фур'є, розв'язати задачі.

1. $u_{tt} - a^2 \Delta u = 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 < r_0^2,\ t > 0;$

$$u\Big|_{x^2+y^2+z^2=r_0^2} = U_0 \sin(\omega t), \quad t \ge 0;$$

$$u\Big|_{t=0} = 0, \quad u_t\Big|_{t=0} = 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 \le r_0^2.$$

2. Визначити радіальний розподіл температури всередині однорідної ізотропної кулі, яка підігрівається за допомогою сталого теплового потоку $Q_0$, заданого на її поверхні. У початковий момент часу куля нагріта рівномірно до температури $U_0$.

## Тема 15. Крайові задачі для нестаціонарних рівнянь у кругових та циліндричних областях

*Контрольні запитання*

1. Як визначаються полярні координати на площині та циліндричні координати в просторі? Які їх особливості?
2. Запишіть оператор Лапласа в полярних та циліндричних координатах.
3. Що таке функції Бесселя (циліндричні функції)? Які їх основні властивості?

4. Сформулюйте теорему про розвинення функції в ряд Фур'є-Бесселя.

*Задачі для аудиторної роботи*

Використовуючи метод Фур'є, розв'язати задачі.

1. $u_{tt} - a^2 \Delta u = 0, \quad x^2 + y^2 < r_0^2,\ t > 0;$

$u\big|_{x^2+y^2=r_0^2} = 0, \quad t \geq 0;$

$u\big|_{t=0} = U_0 \left(1 - r^2 \big/ r_0^2\right), \quad u_t\big|_{t=0} = 0, \quad r^2 = x^2 + y^2 \leq r_0^2.$

2. Визначити осесиметричний розподіл температури в скінченому однорідному циліндрі радіуса $r_0$ та висоти $h$, бічна поверхня якого теплоізольована, верхня та нижня основи підтримуються при нульовій температурі. В початковий момент часу розподіл температури в циліндрі визначається функцією $u_0(r,z) = U_0 z(h-z)\Big(1 + J_0(\alpha_1 r/r_0) + J_0(\alpha_2 r/r_0)\Big)$, $r^2 = x^2 + y^2 \leq r_0^2$, $0 \leq z \leq h$, де $J_0(z)$ — функція Бесселя I роду, $\alpha_{1,2}$ — перші два додатні розв'язки рівняння $J_0'(z) = 0$.

3. Визначити плоский осесиметричний розподіл температури в однорідному нескінченному циліндрі радіуса $r_0$, на бічній поверхні якого заданий тепловий потік $Qt$, $t \geq 0$. В початковий момент часу температура циліндра нульова.

*Задачі для самостійної роботи*

Використовуючи метод Фур'є, розв'язати задачі.

1. Визначити малі осесиметричні вільні поперечні коливання круглої мембрани радіуса $r_0$ з жорстко закріпленою межею, якщо у початковий момент часу по ній вдарив молоточок, що передав імпульс $I$, рівномірно розподілений по ділянці $x^2 + y^2 \leq \varepsilon^2$, $0 < \varepsilon < r_0$. Початкові відхилення точок мембрани нульові.

2. Визначити осесиметричний розподіл температурі в однорідному циліндрі радіуса $r_0$ та висоти $h$, на бічній поверхні якого підтримується нульова температура, а основи теплоізольовані. В початковий момент часу температура циліндра визначається функцією $u_0(r,z) = U_1 J_0\left(\alpha_1 r \big/ r_0\right) + U_2 J_0\left(\alpha_2 r \big/ r_0\right)\cos\dfrac{\pi z}{h}$, $r^2 = x^2 + y^2 \leq r_0^2$, $0 \leq z \leq h$, де $\alpha_{1,2}$ — перші два додатні розв'язки рівняння $J_0(z) = 0$.

3. Визначити плоский осесиметричний розподіл температури в нескінченому

однорідному циліндрі радіуса $r_0$, бічна поверхня якого підтримується при температурі $U_0 + U_1 t$, $t \ge 0$. В початковий момент часу циліндр нагрітий рівномірно до температури $U_0$.

## Приклад модульної контрольної роботи

Використовуючи метод Фур'є, розв'язати задачі.

1. $u_{tt} - u_{xx} + 2u_t = 0, \quad 0 < x < 1,\ t > 0;$

$$u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=1} = 0, \quad t \ge 0;$$

$$u\Big|_{t=0} = \sum_{k=1}^{N} U_k \sin(\pi k x), \quad u_t\Big|_{t=0} = 0, \quad 0 \le x \le 1.$$

2. $u_t - 3\pi u_{xx} = -e^{-t}\left(\dfrac{x^2}{2\pi} - x\right) + 2e^{-2t}\cos(2x),\ \ 0 < x < \pi,\ t > 0;$

$$u_x\Big|_{x=0} = -e^{-t}, \quad u_x\Big|_{x=\pi} = 0, \quad t \ge 0;$$

$$u\Big|_{t=0} = \frac{x^2}{2\pi} - x + 2 - 3\cos(2x), \quad 0 \le x \le \pi.$$

3. $u_{tt} - \Delta u = 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 < 1,\ t > 0;$

$$u\Big|_{x^2+y^2+z^2=1} = 0, \quad t \ge 0;$$

$$u\Big|_{t=0} = 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 \le 1,$$

$$u_t\Big|_{t=0} = \begin{cases} 1/2 - \rho, & 0 \le \rho \le 1/2, \\ 0, & 1/2 \le \rho \le 1, \end{cases} \qquad \rho^2 = x^2 + y^2 + z^2 \le 1.$$

4. $u_t - 2\Delta u = 0, \quad x^2 + y^2 < 4,\ 0 < z < 1,\ t > 0;$

$$\partial u / \partial \vec{\nu}\Big|_{x^2+y^2=4} = 0, \quad 0 < z < 1,\ t \ge 0;$$

$$u\Big|_{z=0} = 0, \quad u_z\Big|_{z=1} = 0, \quad x^2 + y^2 < 4,\ t \ge 0;$$

$$u\Big|_{t=0} = 3\sin\frac{\pi z}{2} + 2J_0\left(\frac{\alpha_1 r}{2}\right)\sin\frac{5\pi z}{2} - J_0\left(\frac{\alpha_2 r}{2}\right)\sin\frac{3\pi z}{2},$$

$$r^2 = x^2 + y^2 \le 4,\ 0 \le z \le 1,$$

$\vec{\nu}$ — одинична зовнішня нормаль до бічної поверхні циліндра, $J_0(z)$ — функція Бесселя I роду, $\alpha_{1,2}$ — перші два додатні розв'язки рівняння $J_0'(z) = 0$.

# *Модуль 4.* Крайові задачі для стаціонарних рівнянь

## Тема 16. Крайові задачі для рівняння Лапласа у прямокутних областях

*Контрольні запитання*

1. В чому полягає постановка внутрішніх крайових задач для рівняння Лапласа? В чому їх відмінність від крайових задач для нестаціонарних рівнянь?
2. Сформулюйте теореми єдиності розв'язку внутрішніх задач Діріхле та Неймана. Запишіть необхідну умову існування розв'язку внутрішньої задачі Неймана.

*Задачі для аудиторної роботи*

Використовуючи метод Фур'є, розв'язати задачі.

1. $\Delta u = 0, \quad 0 < x < a,\ 0 < y < b;$

$u\big|_{x=0} = u\big|_{x=a} = 0, \quad 0 < y < b;$

$u\big|_{y=0} = f_0(x), \quad u\big|_{y=b} = f_1(x), \quad 0 < x < a.$

2. $\Delta u = 0, \quad 0 < x < a,\ 0 < y < b;$

$u_y\big|_{y=0} = u_y\big|_{y=b} = 0, \quad 0 < x < a;$

$u_x\big|_{x=0} = q_0(y), \quad u_x\big|_{x=a} = q_1(y), \quad 0 < y < b.$

Окремо розглянути випадок, коли $q_0(x) = A_0 + A_1\cos(\pi y/b)$, $q_1(x) = B_0 + B_1\cos(2\pi y/b)$.

3. $\Delta u = 0, \quad 0 < x, y < 1;$

$u\big|_{x=0} = 0, \quad u\big|_{x=1} = y, \quad 0 < y < 1;$

$u\big|_{y=0} = 0, \quad u\big|_{y=1} = x, \quad 0 < x < 1.$

*Задачі для самостійної роботи*

Використовуючи метод Фур'є, розв'язати задачі.

1. $\Delta u = 0, \quad 0 < x, y < a;$

$u\big|_{y=0} = u\big|_{y=a} = 0, \quad 0 < x < a;$

$u_x\big|_{x=0} = 0, \quad u\big|_{x=a} = \sum_{k=1}^{N} A_k \sin\frac{\pi k y}{a}, \quad 0 < y < a.$

2. $\Delta u = 0, \quad 0 < x < a, 0 < y < b;$

$u\big|_{x=0} = u_x\big|_{x=a} = 0, \quad 0 < y < b;$

$u\big|_{y=0} = 0, \quad u_y\big|_{y=b} = q(x), \quad 0 < x < a.$

3. $\Delta u = 0, \quad 0 < x, y < a;$

$u_x\big|_{x=0} = q(y), \quad u_x\big|_{x=a} = 0, \quad 0 < y < a;$

$u_y\big|_{y=0} = u_y\big|_{y=a} = 0, \quad 0 < x < a.$

4. Визначити плоский стаціонарний розподіл температури в нескінченному паралелепіпеді, поперечний переріз якого має форму прямокутника $0 < x < a$, $0 < y < b$, якщо через бічну грань $x = 0$ в паралелепіпед подається тепловий потік $q_0(y) = A_0 + A_1 \cos(\pi y/b)$, $0 < y < b$, а через бічну грань $y = 0$ — тепловий потік $q_1(x) = B_0 + B_1 \cos(2\pi x/a)$, $0 < x < a$. Грані $x = a$ та $y = b$ теплоізольовані. Встановити умови, за яких існує розв'язок задачі.

## Тема 17. Крайові задачі для рівняння Лапласа у кругових областях

*Контрольні запитання*

1. В чому полягає постановка внутрішніх та зовнішніх крайових задач для рівняння Лапласа на площині? Що таке умова регулярності на нескінченності?
2. Сформулюйте теореми єдиності розв'язку внутрішніх та зовнішніх задач Діріхле та Неймана на площині. Запишіть необхідну умову існування розв'язку внутрішньої та зовнішньої задач Неймана на площині.

*Задачі для аудиторної роботи*

Використовуючи метод Фур'є, розв'язати задачі.

1. Знайти стаціонарний розподіл температури в тонкій однорідній круглій пластині, межа якої підтримується при заданій температурі.
2. Знайти плоский стаціонарний розподіл температури всередині нескінченного кругового циліндра з поперечним перерізом $x^2 + y^2 < r_0^2$, на бічній поверхні якого задано тепловий потік $q(x, y) = A_0 x^2 + B_0 y^2 + A_1 x + B_1 y + C$, $x^2 + y^2 = r_0^2$.
3. Знайти потенціал плоскої стаціонарної течії ідеальної нестисливої рідини, яка обтікає нескінченний абсолютно твердий круговий циліндр радіуса $r_0$, за умови, що на нескінченності рідина має швидкість $V_0$, яка напрямлено перпендикулярно до осі циліндру.

*Задачі для самостійної роботи*

Використовуючи метод Фур'є, розв'язати задачі.

1. $\Delta u = 0, \quad x^2 + y^2 < r_0^2;$

$$u\Big|_{x^2+y^2=r_0^2} = Ax^2 + Bxy + Cy + D.$$

2. Знайти плоский стаціонарний розподіл температури зовні нескінченного кругового циліндру радіуса $r_0$, якщо на його поверхні підтримується задана температура.

3. $\Delta u = 0, \quad x^2 + y^2 < r_0^2;$

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}}\bigg|_{x^2+y^2=r_0^2} = Ay^2 + Bxy + Cx + D,$$

$\vec{\nu}$ — одинична зовнішня нормаль до кола $x^2 + y^2 = r_0^2$.

4. Знайти плоский стаціонарний розподіл температури зовні нескінченного кругового циліндру з поперечним перерізом $x^2 + y^2 \le r_0^2$, якщо на його поверхні заданий стаціонарний тепловий потік $q_0(x,y) = Ax^2 + By^2 + Cy + D$, $x^2 + y^2 = r_0^2$.

## Тема 18. Крайові задачі для рівняння Лапласа у сферичних областях

*Контрольні запитання*

1. В чому полягає постановка внутрішніх та зовнішніх крайових задач для рівняння Лапласа у просторі? Що таке умова регулярності на нескінченності?
2. Сформулюйте теореми єдиності розв'язку внутрішніх та зовнішніх задач Діріхле та Неймана у просторі. Запишіть необхідну умову існування розв'язку внутрішньої задачі Неймана у просторі.
3. Чи є необхідна умова існування розв'язку для зовнішньої задачі Неймана у просторі?
4. Що таке поліноми Лежандра? Які їх основні властивості?

*Задачі для аудиторної роботи*

Використовуючи метод Фур'є, розв'язати задачі.

1. Знайти потенціал електростатичного поля всередині заземленої сфери радіуса $r_0$, якщо в точці $M$, яка знаходиться на відстані $a$, $0 \le a < r_0$, розташовано точковий заряд величини $Q$.
2. Знайти осесиметричний стаціонарний розподіл температури всередині однорідної кулі $x^2 + y^2 + z^2 < r_0^2$, на поверхні якої заданий стаціо-

нарний тепловий потік. Окремо розглянути випадок, коли на поверхні кулі $x^2 + y^2 + z^2 = r_0^2$ потік визначається функцією $q(x, y, z) = A(x^2 + y^2) + Bz^2 + Cz + D$.

3. Знайти стаціонарний розподіл температури зовні кулі, якщо на її поверхні заданий стаціонарний тепловий потік, який дорівнює $Q = \mathrm{const}$ на верхній півсфері, що обмежує кулю, та $(-Q)$ на нижній.

*Задачі для самостійної роботи*

Використовуючи метод Фур'є, знайти розв'язки таких задач:

1. Знайти стаціонарний розподіл температури всередині однорідної кулі, якщо верхня півсфера, що обмежує кулю, підтримується при температурі $U_0 = \mathrm{const}$, а нижня — при нульовій.
2. Знайти потенціал електростатичного поля зовні заземленої сфери радіуса $r_0$, якщо в точці $M$, яка знаходиться на відстані $a$, $a > r_0$, розташовано точковий заряд величини $Q$.
3. $\Delta u = 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 < r_0^2;$

   $$\left.\partial u \middle/ \partial \vec{\nu}\right|_{x^2+y^2+z^2=r_0^2} = A(x^2 + y^2) + Bz^2 + Cz + D,$$

   де $\vec{\nu}$ — одинична зовнішня нормаль до сфери $x^2 + y^2 + z^2 = r_0^2$.
4. Знайти потенціал стаціонарної течії ідеальної нестисливої рідини, яка обтікає абсолютно тверду кулю радіуса $r_0$, за умови, що на нескінченності рідина має швидкість $V_0$.

## Тема 19. Функція Гріна задачі Діріхле

*Контрольні запитання*

1. Дайте означення функцій Гріна задачі Діріхле на площині та у просторі.
2. Сформулюйте основні властивості функції Гріна. У чому полягає її фізичний зміст?
3. Як запишеться розв'язок задачі Діріхле через функцію Гріна?
4. У чому полягає метод віддзеркалення побудови функцій Гріна?
5. Яка основна ідея методу конформних відображень побудови функції Гріна задачі Діріхле на площині?

*Задачі для аудиторної роботи*

1. Використовуючи метод віддзеркалень, побудувати функції Гріна задач Діріхле у просторі $Ox_1x_2x_3$ для таких областей:

а) $x_3 > 0$;

б) $x_1 > 0,\ x_2 > 0$;

в) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < R^2\ (R > 0)$;

г) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < R^2,\ x_3 > 0\ (R > 0)$;

д) $0 < x_3 < 1$.

2. Методом віддзеркалень побудувати функцію Гріна задачі Діріхле для півплощини $\{(x_1, x_2) : x_2 > 0\}$. Використовуючи побудовану функцію Гріна, розв'язати задачу:

$$\Delta u = 0, \quad x_1 \in \mathbb{R}, x_2 > 0; \qquad u\big|_{x_2=0} = \begin{cases} U_1, & x_1 < 0, \\ U_2, & x_1 > 0. \end{cases}$$

3. Побудувати функції Гріна задач Діріхле для вказаних областей на площині методом конформних відображень:

а) $\operatorname{Im} z > 0$;

б) $0 < \arg z < \pi/2$;

в) $|z| < R,\ (R > 0)$;

г) $|z| < R,\ 0 < \arg z < \pi/2,\ (R > 0)$;

д) $0 < \operatorname{Im} z < h\ (h > 0)$,

де $z = x_1 + ix_2$.

*Задачі для самостійної роботи*

1. Використовуючи метод віддзеркалень, побудувати функції Гріна задач Діріхле у просторі $Ox_1x_2x_3$ для таких областей:

а) $x_1 > 0,\ x_2 > 0,\ x_3 > 0$;

б) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < R^2,\ x_2 > 0,\ x_3 > 0\ (R > 0)$;

в) $0 < x_3 < 1,\ x_2 > 0$.

2. Побудувавши функцію Гріна для відповідної області, розв'язати такі задачі у просторі:

а) $\Delta u = 0, \quad x_{1,2} \in \mathbb{R}, x_3 > 0; \qquad u\big|_{x_3=0} = \begin{cases} U_1, & x_1 > 0, \\ U_2, & x_1 < 0, \end{cases} \quad x_2 \in \mathbb{R};$

б) $\Delta u = 0, \quad x_1 > 0, x_2 > 0, x_3 \in \mathbb{R}; \quad u\big|_{x_1=0} = 0; \quad u\big|_{x_2=0} = U_0.$

3. Побудувати функції Гріна задач Діріхле для вказаних областей на площині методом конформних відображень:

а) $\mathrm{Re}\, z > 0$;

б) $0 < \arg z < {}^{\pi}\!/_{n}, \quad n \in \mathbb{N}$;

в) $\left|\arg z\right| < {}^{\pi}\!/_{(2n)}, \quad n \in \mathbb{N}$;

г) $|z| < R, \quad \mathrm{Im}\, z > 0 \quad (R > 0)$;

д) $0 < \mathrm{Im}\, x < h, \quad \mathrm{Re}\, z > 0 \quad (h > 0)$,

де $z = x_1 + ix_2$.

4. Побудувавши функцію Гріна для відповідної області, розв'язати такі задачі на площині:

а) $\Delta u = 0, \quad x_1 \in \mathbb{R}, x_2 > 0; \qquad u\Big|_{x_2=0} = \begin{cases} U_0, & x_1 \in (a,b), \\ 0, & x_1 \notin (a,b); \end{cases}$

б) $\Delta u = 0, \quad x_1 > 0, x_2 > 0; \qquad u\Big|_{x_1=0} = 0, \quad u\Big|_{x_2=0} = U_0$;

## Приклад модульної контрольної роботи

1. $\Delta u = 0, \quad 0 < x < 1, 0 < y < \pi$;

$$u_x\Big|_{x=0} = 0, \quad u_x\Big|_{x=1} = \sum_{k=1}^{N} Q_k \sin(ky), \quad 0 < y < \pi;$$

$$u\Big|_{y=0} = u\Big|_{y=\pi} = 0, \quad 0 < x < 1.$$

2. $\Delta u = 0, \quad x^2 + y^2 > 4$;

$$u\Big|_{x^2+y^2=4} = Ax^2 + Bxy + Cy + D;$$

$$u = \mathrm{O}(1), \quad r^2 = x^2 + y^2 \to +\infty.$$

3. $\Delta u = 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 < 1$;

$$\left.{}^{\partial u}\!/_{\partial \vec{\nu}}\right|_{x^2+y^2+z^2=1} = A(x^2 + y^2) + Bz^2 + Cz + D,$$

де $\vec{\nu}$ — одинична зовнішня нормаль до сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

## Зміст

Навчальне видання

Методичні вказівки
до практичних занять з дисципліни

# “Рівняння математичної фізики”

для студентів механіко-математичного факультету,
які навчаються за напрямом підготовки "Механіка"

Упорядники: Ловейкін Андрій Вячеславович
Креневич Андрій Павлович
Верьовкіна Ганна Володимирівна