КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА
МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ

РОБОЧА НАВЧАЛЬНА ПРОГРАМА ДИСЦИПЛІНИ

КИЇВ – 2011

Київський національний університет
імені Тараса Шевченка
Механіко-математичний факультет
Кафедра математичної фізики

"ЗАТВЕРДЖУЮ"

Голова вченої ради_____________ М.Ф. Городній

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ

РОБОЧА НАВЧАЛЬНА ПРОГРАМА ДИСЦИПЛІНИ

освітньо-професійних програм підготовки
магістрів математики, механіки, статистики
(____)
І курс, ІІ семестр – ІІ курс, І семестр

Затверджено вченою радою
механіко-математичного факультету
протокол № ____ від "____"__________2011 р.

Викладачі
к.ф.-м.н., доцент Ловейкін А.В.
к.ф.-м.н., доцент Креневич А.П.

Погоджено з науково-методичною комісією
"___"_________2011 р.

____
Підпис голови НМК факультету

Київ – 2011

Методичні рекомендації з вивчення дисципліни

Дисципліна "Диференціальні рівняння з частинними похідними" є базовою дисципліною для студентів-магістрів, які навчаються за спеціальностями "Математика", "Механіка", "Статистика". Викладається дисципліна протягом II семестру I курсу магістратури та I семестру II курсу магістратури у обсязі 80 години (2,2 кредиту за Європейською кредитно-трансферною системою ECTS), в тому числі 51 година лекцій (34 години у II семестрі I курсу та 17 годин у I семестрі II курсу), 17 годин практичних (у I семестрі II курсу), 12 годин самостійної роботи (10 годин у II семестрі I курсу та 2 години у I семестрі II курсу).

Метою і завданням навчальної дисципліни "Диференціальні рівняння з частинними похідними" є: ознайомлення та оволодіння базовими поняттями та положеннями теорії лінійних, квазі-лінійних та нелінійних задач для рівнянь з частинними похідними, теоретичними та практичними навичками дослідження існування класичних та слабких розв'язків цих задач.

Предмет навчальної дисципліни "Диференціальні рівняння з частинними похідними" включає: крайові задачі для лінійних, квазі-лінійних та нелінійних рівнянь з частинними похідними, питання існування та єдиності слабких розв'язків цих задач.

Вимоги до знань та вмінь.

Для успішного засвоєння матеріалу студент повинен *знати* матеріли курсів: "Математичний аналіз" (зокрема, матеріали розділів: диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної; метричні простори; диференціальне та інтегральне числення функцій багатьох змінних; функціональні ряди, степеневі ряди; ряд Фур'є, інтеграл Фур'є); "Лінійна алгебра" (зокрема, матеріали розділів: лінійні простори; лінійні перетворення; матриці; квадратичні форми); "Функціональний аналіз" (зокрема, матеріали розділів: лінійні нормовані простори, банахові простори, гільбертові простори; ортогональні, ортонормовані та повні системи функцій; лінійні неперервні функціонали, спряжений простір, рефлексивні простори; похідна та диференціал Гато, умови мінімуму функціоналів, опуклі функціонали; оператори, теореми про нерухому точку операторів, теореми про існування розв'язків операторних рівнянь; узагальнені похідні та простори Соболєва з цілими показниками $W_p^{(k)}(\Omega)$, слід функцій та простір Соболєва $\overset{\circ}{W}{}_p^{(k)}(\Omega)$; простори Соболєва з нецілим показником $W_p^{(k+\lambda)}(\Omega)$.

Для успішного засвоєння матеріалу студент повинен *вміти*: визначати тип рівняння, рахувати норми функцій у просторах Соболева та $L_p(\Omega)$, рахувати норми функціоналів, знаходити погідні та диференціали Гато від функціоналів, розв'язувати задачі на мінімум функціоналу, зводити крайові задачі для диференціальних рівнянь з частинними похідними до слабких задач та варіаційних задач, доводити існування та єдиність слабких розв'язків, застосовувати топологічні методи, пов'язані із поняттям індексу відображення, до аналізу загальних крайових задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними.

Система поточного, модульного та підсумкового контролю.

Дисципліна "Диференціальні рівняння з частинними похідними" розділена на 2 модулі і оцінюється за модульно-рейтиговою системою.

Результати навчальної діяльності студентів оцінюються за 100-бальною шкалою в цілому за весь курс.

Форми поточного контролю: опитування на лекціях, відповіді на практичних заняттях, перевірка виконання домашніх завдань, письмові самостійні роботи.

Модульний контроль: модульна контрольна робота.

Підсумковий контроль: екзамен.

За результатами кожного семестру студент отримує підсумкову оцінку за 100-бальною шкалою, яка є сумою балів, отриманих студентом за кожен із модулів та оцінки за екзамен згідно із наведеними таблицями.

	Змістовний модуль 1	*Змістовний модуль 2*	*Екзамен*	*Підсумкова оцінка*
Максимальна оцінка в балах	30	30	40	100

При цьому, кількість балів відповідає оцінкам за національною шкалою згідно із наведеною нижче шкалою відповідності

Шкала відповідності оцінки за 100-бальною та національною шкалами

За 100-бальною шкалою	*Оцінка іспиту за національною шкалою*	
90 – 100	5	відмінно
75 – 89	4	добре
60 – 74	3	задовільно
1 – 59	2	незадовільно

НАВЧАЛЬНО-ТЕМАТИЧНИЙ ПЛАН ДИСЦИПЛІНИ

II семестр I курсу магістратури

№ теми	Назва теми	Кількість годин	
		Лекції	Самостійна робота
МОДУЛЬ 1. Загальна постановка крайових задач для рівнянь еліптичного типу. Слабкі розв'язки			
1.	Узагальнені похідні, простори Соболєва. Слід функцій, його властивості.	6	2
2.	Додатно визначені оператори та еліптичні задачі.	12	3
3.	Слабкі розв'язки диференціального рівняння з частинними похідними та крайової задачі для такого рівняння.	16	3
Модульна контрольна робота		—	2
Всього		**34**	**10**

I семестр II курсу магістратури

№ теми	Назва теми	Кількість годин		
		Лекції	Практичні заняття	Самостійна робота
МОДУЛЬ 2. Топологічні методи аналізу крайових задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними				
4.	Постановка загальної нелінійної еліптичної крайової задачі. Застосування поняття степеня відображення до дослідження існування розв'язку задачі.	8	8	—
5.	Постановка загальної нелінійної параболічної крайової задачі. Застосування поняття степеня відображення до дослідження існування розв'язку задачі.	6	6	—
6.	Метод Кондратьєва дослідження крайових задач з конічною точкою	3	3	—
Модульна контрольна робота		—	—	2
Всього		**17**	**17**	**2**

ТЕМИ ЛЕКЦІЙ, ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ ТА ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

ЗМІСТОВНИЙ МОДУЛЬ 1. Загальна постановка крайових задач для рівнянь еліптичного типу. Слабкі розв'язки

ТЕМА 1. Узагальнені похідні, простори Соболєва. Слід функцій, його властивості

Лекція 1. Поняття узагальненої похідної. Властивості узагальнених похідних. *– 2 год.*

Лекція 2. Означення простору Соболєва $W_p^{(k)}(\Omega)$. Теореми вкладення. – *2 год.*

Лекція 3. Слід функцій з простору Соболєва. Оператор сліду. Ядро оператору сліду та простір $\overset{\circ}{W}{}_p^{(k)}(\Omega)$. *– 2 год.*

Самостійна робота. Опрацювати матеріал лекцій 1-3. – *1 год.* – Література [1, 1, 6].

ТЕМА 2. Додатно визначені оператори та еліптичні задачі

Лекція 4. Означення додатно визначеного оператора. Енергетичний скалярний добуток, енергетична норма, енергетичний простір, функціонал енергії. Зв'язок між розв'язками операторного рівняння та задачі про мінімум функціоналу енергії *– 2 год.*

Лекція 5. Теорема про існування розв'язку задачі про мінімум енергетичного функціоналу на енергетичному просторі *– 2 год.*

Лекція 6. Нерівність Фрідрікса *– 2 год.*

Лекція 7. Теорема про структуру енергетичного простору, який відповідає лінійній еліптичній крайовій задачі з однорідною крайовою умовою *– 2 год.*

Лекція 8. Зведення лінійної еліптичної крайової задачі з неоднорідною крайовою умовою до задачі про мінімум функціоналу. Існування розв'язку задачі про мінімум функціоналу. *– 4 год.*

Самостійна робота. Опрацювати матеріал лекцій 4-8. – *3 год.* – Література [3, 4].

ТЕМА 3. Слабкі розв'язки диференціального рівняння з частинними похідними та крайової задачі для такого рівняння

Лекція 9. Слабкий розв'язок нелінійного диференціального рівняння з частинними похідними, яке записане у дивергентній формі. Умови Каратеодорі. – *2 год*.

Лекція 10. Слабкі розв'язки крайових задач для лінійних дивергентних рівнянь *– 2 год.*

Лекція 11. Класифікація нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними – *2 год.*

Лекція 12. Похідна від функціоналу у сенсі Гато. Необхідна умова мінімуму функціоналу. Опуклі множини та функціонали. Достатня умова опуклості функціоналу. Необхідна та достатня умова мінімуму опуклого функціоналу. – *2 год.*

Лекція 13. Зведення квазілінійної еліптичної крайової задачі до операторного рівняння. Теорема про існування розв'язку операторного рівняння. – *2 год.*

Лекція 14. Квазілінійні еліптичні рівняння 2-го порядку. Принцип порівняння. – *2 год.*

Лекція 15. Топологічні теореми про нерухому точку. Застосування теорем про нерухому точку до доведення теореми про існування розв'язку квазілінійної крайової задачі. – *4 год.*

Самостійна робота. Опрацювати матеріал лекцій 9-15. – *3 год.* – Література [4, 7].

Самостійна робота. Модульна контрольна робота. – *2 год.*

Питання до змістовного модуля 1

1. Поняття узагальненої похідної. Властивості узагальнених похідних.
2. Означення простору Соболєва $W_p^{(k)}(\Omega)$. Теореми вкладення.
3. Слід функцій з простору Соболєва. Оператор сліду.
4. Ядро оператору сліду та простір $\overset{\circ}{W}{}_p^{(k)}(\Omega)$.
5. Означення додатно визначеного оператора. Енергетичний скалярний добуток, енергетична норма, енергетичний простір, функціонал енергії.
6. Зв'язок між розв'язками операторного рівняння та задачі про мінімум функціоналу енергії.
7. Теорема про існування розв'язку задачі про мінімум енергетичного функціоналу на енергетичному просторі.
8. Нерівність Фрідрікса.
9. Теорема про структуру енергетичного простору, який відповідає лінійній еліптичній крайовій задачі з однорідною крайовою умовою.
10. Зведення лінійної еліптичної крайової задачі з неоднорідною крайовою умовою до задачі про мінімум функціоналу.
11. Існування розв'язку задачі про мінімум функціоналу у випадку крайової задачі з неоднорідною крайовою умовою.
12. Слабкий розв'язок нелінійного диференціального рівняння з частинними похідними, яке записане у дивергентній формі. Умови Каратеодорі.
13. Слабкі розв'язки крайових задач для лінійних дивергентних рівнянь.
14. Класифікація нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними.
15. Зведення квазілінійної еліптичної крайової задачі до операторного рівняння.
16. Теорема про існування розв'язку операторного рівняння.

17. Принцип порівняння для квазілінійних еліптичних рівнянь 2-го порядку.
18. Топологічні теореми про нерухому точку.
19. Теорема про існування розв’язку квазілінійної крайової задачі.

Приклад модульної контрольної роботи

1. Довести нерівність Фрідрікса.
2. Звести крайову задачу

$$-\mathrm{div}\big(p(x)\nabla u\big)+q(x)u=f(x),\quad x\in\Omega,\qquad u\big|_{\partial\Omega}=\varphi(x),$$

де $p\in C^{(1)}(\bar{\Omega})$, $\min\limits_{x\in\Omega}p(x)>0$, $q\in C(\bar{\Omega})$, $q(x)\ge 0, x\in\bar{\Omega}$, до слабкої задачі. Довести існування розв’язку слабкої задачі.

ЗМІСТОВНИЙ МОДУЛЬ 2. Топологічні методи аналізу крайових задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними

ТЕМА 4. Постановка загальної нелінійної еліптичної крайової задачі. Застосування поняття степеня відображення до дослідження існування розв’язку задачі

Лекція 16. Степінь скінченновимірного відображення. Відображення класу $(S)_+$ та степінь нескінченновимірного відображення. – *2 год*.

Лекція 17. Простір Соболєва $W_p^{(k+\lambda)}(\Omega)$ з нецілим показником диференціювання. Простори Соболєва $W_p^{(k)}(\partial\Omega)$ та $W_p^{(k+\lambda)}(\partial\Omega)$. – *2 год*.

Лекція 18. Постановка загальної нелінійної еліптичної крайової задачі. Зведення задачі до операторного рівняння. Основні властивості оператора, що відповідає задачі. – *2 год*.

Лекція 19. Теорема про існування розв’язку нелінійної еліптичної задачі за допомогою параметричного сімейства крайових задач. – *2 год*.

Практичне заняття 1. Степінь скінченновимірного відображення. Умова $(S)_+$ та степінь нескінченновимірного відображення. – *2 год.* – Література [7, 9].

Практичне заняття 2. Зведення крайових задач до варіаційних. – *2 год.* – Література [4, 9].

Практичне заняття 3. Додатно визначені оператори. Енергетичні простори. – *2 год.* – Література [3, 4, 9].

Практичне заняття 4. Додатно визначені оператори та еліптичні задачі. – *2 год.* – Література [3, 4, 9].

ТЕМА 5. Постановка загальної нелінійної параболічної крайової задачі. Застосування поняття степеня відображення до дослідження існування розв'язку задачі

Лекція 20. Анізоторпні простори диференціювання. Апріорні оцінки розв'язків лінійних параболічних задач. – *2 год*.

Лекція 21. Постановка загальної нелінійної параболічної задачі. Зведення до операторного рівняння. – *2 год.*

Лекція 22. Степінь оператора, що відповідає параболічній задачі. Теорема про існування розв'язку нелінійної параболічної задачі. – *2 год.*

Практичне заняття 5. Зведення нелінійних параболічних задач до операторних рівнянь. – *2 год.* – Література [4, 5, 6, 9].

Практичне заняття 6. Доведення існування розв'язків нелінійних параболічних задач за допомогою однопараметричного сімейства крайових задач. – *2 год.* – Література [4, 5, 6, 9].

Практичне заняття 7. Побудова гальоркінських наближень розв'язків нелінійних параболічних задач. – *2 год.* – Література [4, 5, 6, 9].

ТЕМА 6. Метод Кондратьєва дослідження крайових задач з конічною точкою

Лекція 23. Простори Соболєва з вагою. – *1 год.*

Лекція 24. Крайові задачі у областях із конічною точкою. Метод Кондратьєва. – *2 год.*

Практичне заняття 8. Метод Кондратьєва дослідження крайових задач з конічною точкою. – *2 год.* – Література [8, 9].

Самостійна робота. Модульна контрольна робота. – *2 год.*

Питання до змістовного модуля 2

1. Степінь скінченновимірного відображення.
2. Властивості степеня скінченновимірного відображення. Теореми про степінь.
3. Умова $(S)_+$. Відображення класу $(S)_+$.
4. Степінь нескінченновимірного відображення. Теореми, що обґрунтовують поняття степеня.
5. Теореми про степінь нескінченновимірного відображення.
6. Простір Соболєва $W_p^{(k+\lambda)}(\Omega)$ з нецілим показником диференціювання.
7. Простори Соболєва $W_p^{(k)}(\partial\Omega)$ та $W_p^{(k+\lambda)}(\partial\Omega)$.
8. Апріорна оцінка розв'язку лінійної еліптичної крайової задачі.
9. Постановка загальної нелінійної еліптичної крайової задачі.
10. Зведення нелінійної еліптичної крайової задачі до операторного рівняння.
11. Властивості оператора, що відповідає нелінійній еліптичній крайовій задачі.

12. Теорема про існування розв’язку нелінійної еліптичної задачі за допомогою параметричного сімейства крайових задач.
13. Анізоторпні простори диференціювання.
14. Апріорні оцінки розв’язків лінійних параболічних задач.
15. Постановка загальної нелінійної параболічної задачі.
16. Зведення нелінійної параболічної задачі до операторного рівняння.
17. Властивості оператора, що відповідає нелінійній параболічній задачі.
18. Степінь оператора, що відповідає нелінійній параболічній задачі.
19. Теорема про існування розв’язку нелінійної параболічної задачі.
20. Простори Соболєва з вагою.
21. Крайові задачі у областях із конічною точкою. Метод Кондратьєва.

Приклад модульної контрольної роботи

1. Сформулюйте теореми, що обґрунтовують поняття степеня нескінченновимірного відображення. Що називається степенем нескінченновимірного відображення?
2. Звести нелінійну параболічну задачу
$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u - \sin u = f(x,t), \quad x \in \Omega, t \in (0,T),$$
$$u = g(x,t), \quad x \in \partial\Omega, t \in (0,T), \qquad u(x,0) = h(x), \quad x \in \Omega,$$
до операторного рівняння.

ПИТАННЯ НА ЕКЗАМЕН

1. Поняття узагальненої похідної. Властивості узагальнених похідних.
2. Означення простору Соболєва $W_p^{(k)}(\Omega)$. Теореми вкладення.
3. Слід функцій з простору Соболєва. Оператор сліду.
4. Ядро оператору сліду та простір $\overset{\circ}{W}{}_p^{(k)}(\Omega)$.
5. Означення додатно визначеного оператора. Енергетичний скалярний добуток, енергетична норма, енергетичний простір, функціонал енергії.
6. Зв’язок між розв’язками операторного рівняння та задачі про мінімум функціоналу енергії.
7. Теорема про існування розв’язку задачі про мінімум енергетичного функціоналу на енергетичному просторі.
8. Нерівність Фрідрікса.
9. Теорема про структуру енергетичного простору, який відповідає лінійній еліптичній крайовій задачі з однорідною крайовою умовою.
10. Зведення лінійної еліптичної крайової задачі з неоднорідною крайовою умовою до задачі про мінімум функціоналу.
11. Існування розв’язку задачі про мінімум функціоналу у випадку крайової задачі з неоднорідною крайовою умовою.
12. Слабкий розв’язок нелінійного диференціального рівняння з частинними похідними, яке записане у дивергентній формі. Умови Каратеодорі.
13. Слабкі розв’язки крайових задач для лінійних дивергентних рівнянь.

14. Класифікація нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними.
15. Зведення квазілінійної еліптичної крайової задачі до операторного рівняння.
16. Теорема про існування розв'язку операторного рівняння.
17. Принцип порівняння для квазілінійних еліптичних рівнянь 2-го порядку.
18. Топологічні теореми про нерухому точку.
19. Теорема про існування розв'язку квазілінійної крайової задачі.
20. Степінь скінченновимірного відображення.
21. Властивості степеня скінченновимірного відображення. Теореми про степінь.
22. Умова $(S)_+$. Відображення класу $(S)_+$.
23. Степінь нескінченновимірного відображення. Теореми, що обґрунтовують поняття степеня.
24. Теореми про степінь нескінченновимірного відображення.
25. Простір Соболєва $W_p^{(k+\lambda)}(\Omega)$ з нецілим показником диференціювання.
26. Простори Соболєва $W_p^{(k)}(\partial\Omega)$ та $W_p^{(k+\lambda)}(\partial\Omega)$.
27. Апріорна оцінка розв'язку лінійної еліптичної крайової задачі.
28. Постановка загальної нелінійної еліптичної крайової задачі.
29. Зведення нелінійної еліптичної крайової задачі до операторного рівняння.
30. Властивості оператора, що відповідає нелінійній еліптичній крайовій задачі.
31. Теорема про існування розв'язку нелінійної еліптичної задачі за допомогою параметричного сімейства крайових задач.
32. Анізоторпні простори диференціювання.
33. Апріорні оцінки розв'язків лінійних параболічних задач.
34. Постановка загальної нелінійної параболічної задачі.
35. Зведення нелінійної параболічної задачі до операторного рівняння.
36. Властивості оператора, що відповідає нелінійній параболічній задачі.
37. Степінь оператора, що відповідає нелінійній параболічній задачі.
38. Теорема про існування розв'язку нелінійної параболічної задачі.
39. Простори Соболєва з вагою.
40. Крайові задачі у областях із конічною точкою. Метод Кондратьєва.

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

Основна література

1. Мельник Т.А. Простори Соболєва та узагальнені розв'язки задач математичної фізики. – К.: ВПЦ "Київський університет", 2006.
2. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. – Новосибирск, 1962.
3. Михлин С.Г. Курс математической физики. – М.: Наука, 1968.
4. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М.: Мир, 1972.
5. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967.

6. Ниренберг Л. Лекции по нелинейному функциональному анализу. / Математика. Новое в зарубежной науке. Т. 5. – М.: Мир, 1977.
7. Скрыпник И.В. Методы исследования нелинейных эллиптических задач. – М.: Наука, 1990.
8. Кондратьев В.А. Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими и угловыми точками.
9. Ромaнанко І.Б. Диференціальні рівняння з частинними похідними. Навчально-методичні вказівки до практичних занять. – К.: ВПЦ "Київський університет", 2008.

Додаткова література

1. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1981.
2. Гончаренко В.М. Основи теорії рівнянь з частинними похідними. – К.: Вища школа, 1995.
3. Гончаренко В.М. Нелинейные задачи для уравнений с частными производными. – Черновцы: Рута, 2000.
4. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. – М.: Наука, 1983.
5. Мельник Т.А. Простори Соболєва та узагальнені розв’язки задач математичної фізики. – К.: ВПЦ "Київський університет", 2006.

Затверджено на засіданні кафедри математичної фізики, протокол № ____ від ___________2011 р.

Завідувач кафедри, професор В.Г. Самойленко