Київський національний університет імені Тараса Шевченка

КРЕНЕВИЧ А.П.
ЛОВЕЙКІН А.В.

ОСНОВИ ВЕКТОРНОГО АНАЛІЗУ ТА ТЕОРІЇ ПОЛЯ

Навчальний посібник

Київ – 2012

УДК 519.942+550

Рецензенти:
д-р фіз.-мат. наук, проф. О.В.Капустян,
канд. фіз.-мат. наук, доц. О.В.Борисейко.

Рекомендовано до друку вченою радою механіко-математичного факультету (протокол № 8 від 24 квітня 2012 року)

Креневич А.П., Ловейкін А.В.

Основи векторного аналізу та теорії поля: Навчальний посібник – К.: ВПЦ "Київський Університет", 2012. – 55 с.

Посібник містить курс лекцій із дисципліни «Векторний аналіз та теорія поля», що викладається студентам спеціальності «Механіка» механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Він охоплює основні базові поняття цього курсу, такі як: скалярне та векторне поля, градієнт скалярного поля, дивергенція та ротор векторного поля, символічні методи векторного аналізу та диференціальні операції в криволінійних системах координат, гідромеханічне тлумачення аналітичних функцій комплексних змінних.

Для студентів механіко-математичного факультету та викладачів, які проводять заняття з курсу "Векторний аналіз та теорія поля".

Вступ

Векторний аналіз і теорія поля вже протягом тривалого часу входять у програми більшості інженерних, технічних та фізико-математичних спеціальностей. Його апарат використовується у гідродинаміці, теорії пружності, електротехніці тощо.

Посібник написаний на основі курсу лекцій, який автори упродовж тривалого часу викладали студентам механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

Методична розробка складається з шести тем, кожна з яких містить теоретичний матеріал у достатньому обсязі для засвоєння базових понять векторного аналізу, таких як: скалярне та векторне поля, градієнт скалярного поля, потік векторного поля, дивергенція та ротор векторного поля, векторні та скалярні поля у криволінійній системі координат, символічні методи векторного аналізу.

Посібник рекомендується використовувати разом зі збірником задач [7], котрий містить перелік завдань для аудиторної та самостійної роботи. Усі вправи задачника [7] підібрані таким чином, що вони відповідають темам цього посібника.

Навчальний посібник присвячений пам'яті доцента кафедри математичної фізики Київського національного університету імені Тараса Шевченка Романенка Ігоря Борисовича.

Тема 1. Основи векторної алгебри

Основні означення

Означення. *Вектором* називається величина, що характеризується числовим значенням і напрямком.

Графічно вектори зображуються у вигляді напрямлених відрізків прямої певної довжини. При цьому визначають точки, які є *початком* і *кінцем* вектора.

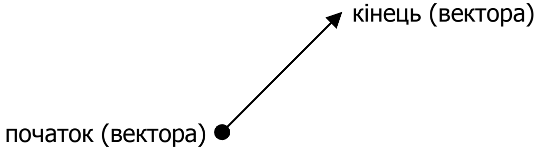

Рис. 1.1.

Як правило, вектори позначаються маленькими латинськими літерами або парами великих латинських літер, що означають точки початку і кінця вектора

$$a,\ b,\ c, ..., AB, ...$$

Зауваження. Часто у літературі для того, щоб розрізняти векторні й скалярні величини, для позначення векторів використовується стрілка над іменами векторів, наприклад,

$$\vec{a}, \overrightarrow{AB}.$$

Проте, для спрощення записів у нашому курсі стрілки над іменами векторів будемо опускати, а векторні й скалярні величини будемо розрізняти за смислом.

Числове значення вектора називають *довжиною* або *модулем* вектора. Довжину вектора a позначають символом $|a|$.

Напрям вектора задається *ортом* – вектором одиничної довжини (одиничним вектором), що лежить на тій самій прямій, що і вектор, або на паралельній до неї.

Означення. Вектори a і b називаються *взаємно перпендикулярними*, якщо вони лежать на взаємно перпендикулярних прямих.

Позначають

$$a \perp b.$$

Нехай у просторі задано трійку взаємно перпендикулярних ортів (i, j, k), що визначають декартову систему координат $Oxyz$ з початком координат у точці O (Рис. 1.2, Рис. 1.3). Прямі $Ox,$ Oy і Oz називаються *координатними осями*, при цьому вісь Ox називається віссю *абсцис*, вісь Oy – віссю *ординат*, а вісь Oz – віссю *аплікат*.

У тривимірному просторі розрізняють праву та ліву системи координат.

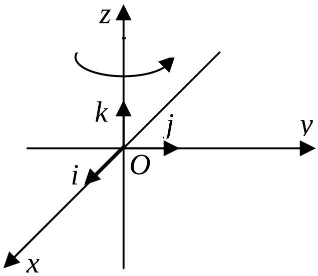

Рис. 1.2. Права система координат

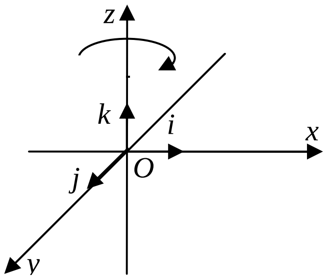

Рис. 1.3. Ліва система координат

Означення. Система координат $Oxyz,$ що визначається трійкою ортів $(i, j, k),$ називається *правою* або *додатною*, якщо з кінця вектора k рух від вектора i до j по меншій дузі спостерігається проти годинникової стрілки (Рис. 1.2). Інакше система координат називається *лівою* або *від'ємною*.

Зауваження. У цьому курсі будемо використовувати лише праві системи координат, оскільки вони поширеніші у літературі.

Нехай $Oxyz$ – права система координат. Тоді кожен вектор a можна розкласти на три складові, що є проекціями вектора a на координатні осі і вони називаються *координатами* вектора

$$a = (a_x, a_y, a_z) = a_x i + a_y j + a_z k.$$

Тут a_x, a_y, a_z – проекції (координати) вектора a відповідно на координатні осі $Ox,$ Oy і Oz.

При цьому довжина вектора визначається формулою

$$|a| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Означення. Два вектори a і b називаються рівними, якщо вони мають однакову довжину й однакові напрямки.

Позначають

$$a = b\ .$$

У координатних позначеннях два вектори рівні між собою, якщо рівні їхні відповідні координати

$$a = b \Leftrightarrow a_x = b_x, a_y = b_y, a_z = b_z.$$

Означення. Два вектори a і b називаються *співнаправленими*, якщо їхні напрями збігаються.

Позначають

$$a \uparrow\uparrow b\ .$$

Означення. Два вектори a і b називаються *колінеарними* (паралельними), якщо вони лежать на паралельних прямих.

Позначають

$$a \| b.$$

Означення. Два вектори a і b називаються *протилежнонаправленими*, якщо вони колінеарні, але не співнаправлені.

Позначають

$$a \uparrow\downarrow b\ .$$

Означення. Три вектори a, b і c називаються *компланарними*, якщо вони лежать у одній площині або паралельні до однієї площини.

Вектор, початок і кінець якого збігаються, називається *нульовим* вектором. Вважають, що нульовий вектор не має напрямку, тому його вважають перпендикулярним, паралельним, співнаправленим і протилежнонаправленим будь-якому вектору. Всі координати нульового вектора є нулями

$$0 = (0,0,0) = 0i + 0\,j + 0k.$$

Основні операції векторної алгебри

Додавання (Сума векторів)

Сумою двох векторів a і b називається вектор c, що визначається за правилом паралелограма:

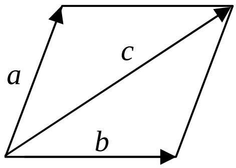

Рис. 1.4. Правило паралелограма

Позначають

$$c = a + b.$$

Якщо відомі координати векторів a і b, то їхня сума – це вектор, координати якого визначаються як суми відповідних координат

$$c = a + b = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z).$$

Віднімання (Різниця векторів)

Різницею двох векторів a і b називається вектор c, який є сумою вектора a і вектора $-b$, що рівний за модулем вектору b, але протилежнонаправленого до b.

$$c = a - b = a + (-b).$$

Якщо відомі координати векторів a і b, то їхня різниця – це вектор, координати якого визначаються як різниці відповідних координат

$$c = a - b = (a_x - b_x, a_y - b_y, a_z - b_z).$$

Множення (Добуток)

Множення на скаляр

Добутком вектора a на скалярну величину λ називається вектор c, що колінеарний до вектора a, модуль якого дорівнює $|\lambda||a|$, співнаправлений з a, якщо $\lambda > 0$, протилежнонаправлений до a, якщо $\lambda < 0$, і дорівнює нулю, якщо $\lambda = 0$,

$$c = \lambda a .$$

Якщо відомі координати векторів a, то

$$\lambda a = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z) = \lambda a_x i + \lambda a_y j + \lambda a_z k.$$

Скалярний добуток

Скалярним добутком двох векторів a і b називається операція, що ставить у відповідність парі векторів a і b скалярну величину s, що чисельно дорівнює добутку модулів векторів a і b на косинуса кута між ними

$$s = ab = (a,b) = |a||b|\cos(a \wedge b)\,. \tag{1.1}$$

У координатному вигляді

$$(a,b) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Останні дві формули дозволяють знаходити кути між векторами. Дійсно

$$\cos(a \wedge b) = \frac{(a,b)}{|a||b|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

Використовуючи останню формулу, знаходять координати орта вектора через напрямні косинуси.

Означення. Напрямними косинусами вектора a називається трійка чисел $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, де $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ – косинуси кутів α, β і γ, які утворює вектор a з осями Ox, Oy і Oz відповідно.

Оскільки

$$i = (1,0,0),\ j = (0,1,0),\ k = (0,0,1),$$

$$|i| = |j| = |k| = 1,$$

то

$$\cos\alpha = \cos(a \wedge i) = \frac{(a,i)}{|a||i|} = \frac{a_x}{|a|},$$

$$\cos\beta = \cos(a \wedge j) = \frac{(a,j)}{|a||j|} = \frac{a_y}{|a|},$$

$$\cos\gamma = \cos(a \wedge k) = \frac{(a,k)}{|a||k|} = \frac{a_z}{|a|}.$$

Очевидно, що вектор

$$\tau_a = a^0 = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = \cos\alpha \cdot i + \cos\beta \cdot j + \cos\gamma \cdot k =$$
$$= \frac{a_x}{|a|} i + \frac{a_y}{|a|} j + \frac{a_z}{|a|} k = \frac{1}{|a|} a \qquad (1.2)$$

є співнаправлений з a і має одиничну довжину, а значить є ортом вектора a.

Властивості скалярного добутку

Нехай a, b, c – три вектори, а λ скалярна величина.

- Два вектори a і b перпендикулярні тоді і лише тоді, коли їхній скалярний добуток дорівнює нулю
$$(a,b) = 0 \Leftrightarrow a \perp b.$$
- Скалярний добуток векторів a і b – операція комутативна
$$(a,b) = (b,a).$$
- Скалярний добуток – лінійна операція
$$(\lambda(a+b), c) = \lambda(a,c) + \lambda(b,c)\ .$$
- З формул (1.1) очевидним чином отримуються співвідношення
$$(a,b) = |a| \cdot \text{П}p\big|_a\, b = |b| \cdot \text{П}p\big|_b\, a,$$

де $\text{П}p\big|_a\, b$ – проекція вектора b на вектор a, а $\text{П}p\big|_b\, a$ – вектора a на b.

Векторний добуток

Означення. Трійка векторів (a,b,c) називається *правою* або *додатною*, якщо з вершини вектора c рух від вектора a до вектора b по коротшому шляху спостерігається проти годинникової стрілки. У іншому разі трійка векторів (a,b,c) називається *лівою* або *від'ємною*.

Векторний добуток – бінарна операція, яка ставить у відповідність парі векторів a і b вектор c, довжина якого дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах a і b як на сторонах:

$$|c| = |a||b||\sin(a \wedge b)|,$$

вектор c перпендикулярний до площини цього паралелограма і направлений так, що трійка векторів (a,b,c) є правою.

Позначають векторний добуток таким чином

$$c = a \times b = [a,b]\,.$$

Якщо відомі координати векторів a і b, то

$$[a,b]=\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}=i\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}-j\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}+k\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}=$$

$$=(a_y b_z - a_z b_y)i+(a_z b_x - a_x b_z)\,j+(a_x b_y - a_y b_x)k.$$

Властивості векторного добутку

Нехай a,b,c – три вектори, а λ – скалярна величина.

- Антикомутативність

$$[a,b]=-[b,a].$$

- Векторний добуток – лінійна операція

$$[\lambda(a+b),c]=\lambda[a,c]+\lambda[b,c].$$

- $[a,b]=0 \Leftrightarrow$ один з векторів нульовий або $a \,||\, b.$

Мішаний добуток

Мішаний добуток – операція, яка трійці векторів a,b,c ставить у відповідність скалярну величину p, абсолютна величина якої дорівнює об’єму паралелепіпеда, побудованого на векторах a,b,c як на ребрах і має знак $"+"$, якщо вектори a,b,c утворюють праву трійку, знак $"-"$, якщо вектори a,b,c утворюють ліву трійку.

Позначають мішаний добуток таким чином

$$p=(a,b,c)\,.$$

Якщо відомі координати векторів a,b і c, то

$$(a,b,c)=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_x & c_z \end{vmatrix}.$$

Властивості мішаного добутку

Нехай a,b,c – три вектори.

- Всі властивості мішаного добутку отримують без особливих труднощів із співвідношення, яке пов'язує мішаний добуток із векторним та скалярним добутками, а саме:

$$(a,b,c) = (a,[b,c]) = ([a,b],c).$$

- Антикомутативність. При перестановці двох сусідніх векторів у мішаному добутку знак мішаного добутку змінюється на протилежний

$$(a,b,c) = -(b,a,c).$$

- Кругова властивість

$$(a,b,c) = (b,c,a).$$

Тема 2. Вектор-функції скалярного аргументу

..

При описі різних фізичних процесів часто використовуються вектори, довжина і напрям яких залежать від деякої скалярної величини. Такі векторні величини називаються *вектор-функціями* скалярного аргументу

$$a = a(t),\ t \in [\alpha, \beta],\ \ a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 .$$

Означення. Відображення відрізка дійсної осі у $\mathbb{R}^3$ називається *вектор-функцією* скалярного аргументу.

$$a : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^3 .$$

Означення. Якщо відображення $a = a(t),\ t \in [\alpha, \beta]$ є неперервним, то вектор-функція називається *неперервною* вектор-функцією скалярного аргументу.

Означення. *Годографом* вектор-функції a називається лінія, яку малює кінець вектора a при проходженні всієї множини аргументів, якщо початок вектора a розташований у початку координат.

У разі, якщо вектор-функція є неперервною, її годограф є неперервною кривою.

Похідна вектор-функції скалярного аргументу

Означення. Похідною від функції $a = a(t),\ t \in [\alpha, \beta]$ у точці t називається границя

$$a'(t) = \frac{da(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{a(t + \Delta t) - a(t)}{\Delta t},$$

якщо вона існує і скінченна, а вектор-функція називається диференційованою у точці t.

Означення. Якщо в кожній точці $t \in [\alpha, \beta]$ існує похідна вектор-функції $a(t)$, то вектор-функція $a(t)$ називається диференційованою на $[\alpha, \beta]$, а вектор-функція

$$a'(t):[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}^3$$

похідною вектор-функції $a(t)$ на $[\alpha,\beta]$.

Зауваження. У вищенаведеному означенні під похідною у крайніх точках α і β розуміють відповідно правосторонню і лівосторонню похідні.

Властивості похідної вектор-функції

Нехай $a(t),b(t)$ – вектор-функції скалярного аргументу, а $\varphi(t)$ – скалярна функція, визначені на одному і тому ж дійсному відрізку $[\alpha,\beta]$. Тоді мають місце такі властивості

- $(a(t)+b(t))'=a'(t)+b'(t);$
- $(\varphi(t)a(t))'=\varphi'(t)a(t)+\varphi(t)a'(t);$
- $(a(t),b(t))'=(a'(t),b(t))+(a(t),b'(t));$
- $[a(t),b(t)]'=[a'(t),b(t)]+[a(t),b'(t)].$

Якщо

$$a(t)=(a_x(t),a_y(t),a_z(t))=a_x(t)i+a_y(t)j+a_z(t)k,$$

то з властивостей похідної легко бачити, що

$$a'(t)=a_x'(t)i+a_y'(t)j+a_z'(t)k.$$

Інтеграл і первісна вектор-функції скалярного аргументу

Означення. Вектор-функція $A=A(t),\ t\in[\alpha,\beta]$ називається *первісною* вектор-функції $a=a(t),\ t\in[\alpha,\beta],$ якщо

$$A'(t)=a(t),\ t\in[\alpha,\beta].$$

Означення. Множина всіх первісних для вектор-функції $a=a(t),\ t\in[\alpha,\beta]$ називається *невизначений інтеграл* від $a(t)$ і позначається

$$\int a(t)dt.$$

Теорема (Про структуру первісної вектор-функції). Якщо $A(t),\ t\in[\alpha,\beta]$ – деяка первісна вектор-функції $a=a(t),\ t\in[\alpha,\beta],$ тоді

$$\int a(t)dt = A(t) + C,$$

де C – довільна вектор-стала.

Властивості невизначеного інтеграла

Нехай $a(t)$ і $b(t)$ – вектор-функції скалярного аргументу визначені на відрізку $[\alpha,\beta]$, c – сталий вектор, а λ – деяка скалярна величина. Тоді мають місце такі властивості:

- $\int \lambda(a(t)+b(t))dt = \lambda\int a(t)dt + \lambda\int b(t)dt;$
- $\int (c,a(t))dt = \left(c,\int a(t)dt\right);$
- $\int [c,a(t)]dt = \left[c,\int a(t)dt\right].$

Означення. Визначеним інтегралом від вектор-функції $a = a(t)$ по проміжку $[\alpha,\beta]$ називається границя

$$\int_{\alpha}^{\beta} a(t)dt = \lim_{|\Delta t_k|\to 0}\sum_{k=0}^{n-1} a(\tau_k)\Delta t_k,$$

де $\{\alpha = t_0 < t_1,...,t_n = \beta\}$ – деяке розбиття відрізка $[\alpha,\beta]$, τ_k – точка з відрізка $[t_k,t_{k+1}]$, $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$.

Для обчислення визначених інтегралів використовують загальновідому формулу Ньютона-Лейбніца.

Теорема (Формула Ньютона-Лейбніца). Нехай $A(t),\ t\in[\alpha,\beta]$ – деяка первісна вектор-функції $a = a(t)$, тоді

$$\int_{\alpha}^{\beta} a(t)dt = A(t)\Big|_{\alpha}^{\beta} = A(\beta) - A(\alpha).$$

Властивості визначеного інтеграла

Нехай $a(t)$ і $b(t)$ – вектор-функції скалярного аргументу визначені на відрізку $[\alpha,\beta]$, а c – сталий вектор. Тоді мають місце такі властивості:

- $\int_{\alpha}^{\beta}(a(t)+b(t))dt = \int_{\alpha}^{\beta} a(t)dt + \int_{\alpha}^{\beta} b(t)dt;$

- Нехай δ – деяке число з інтервалу (α,β). Тоді має місце співвідношення

$$\int_{\alpha}^{\beta} a(t)dt = \int_{\alpha}^{\delta} a(t)dt + \int_{\delta}^{\beta} a(t)dt;$$

- $\int_{a}^{\beta} (c, a(t))dt = \left(c, \int_{a}^{\beta} a(t)dt \right);$
- $\int_{a}^{\beta} [c, a(t)]dt = \left[c, \int_{a}^{\beta} a(t)dt \right].$

Тема 3. Скалярне поле

Означення та приклади

Означення. Якщо в кожній точці M області $D \subset \mathbb{R}^3$ визначено деяку скалярну величину $u(M)$, то кажуть, що в D визначено *скалярне поле* u

$$u : D \to \mathbb{R}.$$

Основною геометричною характеристикою скалярного поля є поверхня рівня.

Означення. *Поверхнею рівня* скалярного поля називається поверхня, для всіх точок якої скалярне поле є однаковим.

$$u(M) = c, \quad c \in \mathbb{R}, c = const.$$

Якщо в просторі введено прямокутну декартову систему координат, то кожна точка простору визначається трійкою чисел

$$M = (x, y, z),$$

а визначення скалярного поля рівносильне визначенню функції від трьох змінних x, y і z

$$u = u(x, y, z), (x, y, z) \in D \subset \mathbb{R}^3 .$$

Тоді поверхня рівня скалярного поля визначається рівнянням

$$u(x, y, z) = c.$$

Означення. Скалярне поле називається *плоским*, якщо існує деяка площина така, що у всіх площинах, паралельних до неї, скалярне поле є однаковим.

У разі плоского скалярного поля систему координат вводять так, щоб ця площина збігалась з однією з координатних площин, наприклад, з площиною Oxy. Тоді скалярне поле визначається як функція від змінних x і y

$$u = u(x, y),$$

а поверхні рівня перетворюються у криві рівня

$$u(x, y) = c.$$

Похідна за напрямком. Градієнт

Нехай в області $D \subset \mathbb{R}^3$ задано скалярне поле u і деякий напрям, що визначається вектором l.

Означення. *Похідною за напрямком* l від скалярного поля u в точці M називається границя

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_M = \lim_{|MM_1| \to 0} \frac{u(M_1) - u(M)}{|MM_1|},\ MM_1 \parallel l. \tag{3.1}$$

якщо така границя існує і скінченна.

Границю (3.1) часто записують у такому еквівалентному вигляді

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_M = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{u(M + \Delta t l) - u(M)}{\Delta t}.$$

Припустимо, що скалярне поле u – диференційоване в точці M, як функція трьох змінних, тоді

$$\Delta u(M) = u(M_1) - u(M) = \frac{\partial u(M)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u(M)}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial u(M)}{\partial z}\Delta z + o(|MM_1|),$$

де $MM_1 = \Delta x i + \Delta y i + \Delta z i$. Позначивши $\Delta l := |MM_1| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$, отримаємо

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_M = \frac{\partial u(M)}{\partial l} = \lim_{\Delta l \to o} \frac{\Delta u(M)}{\Delta l} =$$

$$= \frac{\partial u(M)}{\partial x} \lim_{\Delta l \to o} \frac{\Delta x}{\Delta l} + \frac{\partial u(M)}{\partial y} \lim_{\Delta l \to o} \frac{\Delta y}{\Delta l} + \frac{\partial u(M)}{\partial z} \lim_{\Delta l \to o} \frac{\Delta z}{\Delta l}.$$

Очевидно, що $\left(\frac{\Delta x}{\Delta l}, \frac{\Delta y}{\Delta l}, \frac{\Delta z}{\Delta l}\right)$ – вектор, який складається з напрямних косинусів вектора l.

$$l^0 = \left(\frac{\Delta x}{\Delta l}, \frac{\Delta y}{\Delta l}, \frac{\Delta z}{\Delta l}\right) = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = \frac{l}{|l|}.$$

Тоді отримаємо формулу для обчислення похідної скалярного поля

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_M = \left.\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right)\right|_M . \quad (3.2)$$

Означення. Вектор $grad\, u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right)$ називається градієнтом скалярного поля u.

Градієнт скалярного поля визначають, використовуючи *оператор Гамільтона*, що має вигляд

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k.$$

Тоді

$$grad\, u = \nabla u .$$

Переписуючи формулу (3.2), використовуючи оператор Гамільтона, отримаємо компактний запис формули для визначення похідної скалярного поля u за напрямом l

$$\frac{\partial u}{\partial l} = (\nabla u, l^0) = \left.\textit{Пр}\right|_l \nabla u. \quad (3.3)$$

Геометричний зміст градієнта

Розглянемо точку M. Нехай G – вектор градієнта скалярного поля u у точці M. Побудуємо сферу (коло), що проходить через точку M, для якої вектор G є діаметром. Через точку M проведемо пряму, паралельну до вектора l. Нехай точка A – перетин прямої зі сферою.

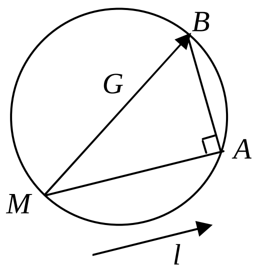

Рис. 3.1.

Тоді $\angle MAB = 90°,$ а значить

$$MA = Пр\big|_l \nabla u = \left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_M .$$

Обертаючи вектор $l,$ можемо переконатися, що

$$\max_l \frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial \nabla u},$$

$$\min_l \frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial n} = 0, \text{ де } n \perp \nabla u.$$

Аналізуючи геометричний зміст градієнта скалярного поля, можемо сформулювати такі його основні властивості.

Властивості градієнта

Нехай u і v – скалярні поля. Тоді

- Вектор градієнта скалярного поля u не залежить від способу введення системи координат.
- Градієнт скалярного поля u – це напрямок найшвидшого зростання скалярного поля u.
- Похідна скалярного поля u за напрямком градієнта є найбільшою серед усіх похідних за напрямком у цій точці.
- Градієнт скалярного поля u у точці M перпендикулярний до поверхні рівня скалярного поля $u = c,$ що проходить через цю точку.
- $\nabla(u+v) = \nabla u + \nabla v.$
- $\nabla(uv) = v\nabla u + u\nabla v.$
- Нехай функція f диференційована у точці $t = u(M).$ Тоді для точки M має місце формула
$$\nabla f(u) = f'(u)\nabla u.$$
- Нехай функція $f = f(u,v)$ має частинні похідні у точці $(t,s) = (u(M), v(M)).$ Тоді для точки M має місце формула
$$\nabla f(u,v) = \frac{\partial f}{\partial u}\nabla u + \frac{\partial f}{\partial v}\nabla v.$$

Тема 4. Векторне поле

Означення та приклади

Означення. Якщо в кожній точці M області $D \subset \mathbb{R}^3$ визначено деяку векторну величину $a(M)$, то кажуть, що в $D \subset \mathbb{R}^3$ визначено *векторне поле*

$$a : D \to \mathbb{R}^3.$$

Якщо в просторі введено прямокутну декартову систему координат, то кожна точка простору визначається трійкою чисел

$$M = (x, y, z),$$

а визначення векторного поля рівносильне визначенню векторної функції від трьох змінних x, y і z

$$a(M) = a(x, y, z) = a_x(x, y, z)i + a_y(x, y, z)j + a_z(x, y, z)k$$

Векторні лінії векторного поля та їхня побудова

Основною геометричною характеристикою векторного поля є векторна лінія векторного поля

Означення. *Векторною лінією* векторного поля a називається крива γ, дотичний вектор до якої паралельний до a.

Побудова векторних ліній

Нехай векторна лінія векторного поля задається параметрично вектор-функцією скалярного аргументу

$$r = r(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k,\ t \in [\alpha, \beta]. \quad (4.1)$$

Кожна точка M векторної лінії визначається з параметричного запису (4.1) для деякого t. Тоді вектор $\frac{dr}{dt}$ – це дотичний вектор до кривої $r = r(t)$.

Згідно з означенням $\frac{dr}{dt} \| a,$ що можна записати у вигляді такого співвідношення

$$\left[\frac{dr}{dt}, a\right] = 0.$$

Переписуючи останнє співвідношення у координатному вигляді, отримаємо співвідношення

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{dx}{dt} & \frac{dy}{dt} & \frac{dz}{dt} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = 0,$$

яке рівносильне такій подвійній рівності

$$\frac{\frac{dx}{dt}}{a_x} = \frac{\frac{dy}{dt}}{a_y} = \frac{\frac{dz}{dt}}{a_z}.$$

З останньої рівності отримуємо систему двох диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{a_x} = \frac{dy}{a_y} = \frac{dz}{a_z}. \tag{4.2}$$

Розв'язком системи (4.2) є дві сім'ї поверхонь

$$\begin{cases} f_1(x, y, z) = c_1, \\ f_2(x, y, z) = c_2, \end{cases}$$

де c_1, c_2 – довільні дійсні сталі. Векторні лінії утворюються перетином цих поверхонь для деяких фіксованих сталих c_1 і c_2.

Поверхні рівня можна знайти, використовуючи параметричний метод. Нехай $r = r(t)$ – параметричний запис векторної лінії. Тоді, як було вище сказано, кожна точка M векторної лінії визначається з параметричного запису (4.1) для деякого t.

$$M = (x, y, z) = (x(t), y(t), z(t)).$$

Отже, векторне поле можна записати як вектор-функцію скалярного аргументу

$$a(t) = a(x(t), y(t), z(t)) =$$
$$= a_x(x(t), y(t), z(t))i + a_y(x(t), y(t), z(t))\, j + a_z(x(t), y(t), z(t))k, \quad t \in [\alpha, \beta].$$

Звідки, згідно з означенням для знаходження векторних ліній, можна застосувати співвідношення

$$\frac{dr(t)}{dt} = a(t),$$

яке рівносильне системі звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} x'(t) = a_x(t), \\ y'(t) = a_y(t), \\ z'(t) = a_z(t), \end{cases}$$

розв'язком якої є параметричний запис (4.1) векторної лінії.

Лінійний інтеграл уздовж кривої

Нехай задано криву AB (з кінцями у точках A і B), таку що для довільної точки M, що належить кривій AB, існує дотичний вектор τ. Нехай на кривій AB вибрано спосіб обходу її точок від точки A до точки B. Таку криву із заданим обходом будемо називати *шляхом* AB.

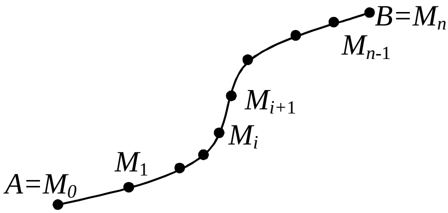

Рис. 4.1. Розбиття кривої AB.

Розіб'ємо криву AB точками $M_i : A = M_0, M_1, ..., M_n = B$ (Рис. 4.1). Припустимо, що розбиття настільки дрібне, що для всіх $i = 0, ..., n-1$ дуга $\overset{\frown}{M_i M_{i+1}}$ майже не відрізняється від вектора $M_i M_{i+1}$

$$\overset{\frown}{M_i M_{i+1}} \approx M_i M_{i+1}$$

Нехай a – векторне поле, визначене у деякому околі цієї кривої. Розглянемо вираз

$$\sum_{i=0}^{n-1}(a(M_i), M_iM_{i+1}) \tag{4.3}$$

Означення. *Лінійним інтегралом* від векторного поля a вздовж шляху AB називається границя суми (4.3) при $|M_iM_{i+1}| \to 0$ (або, що те ж саме $n \to \infty$)

$$\int_{AB}(a, dl) = \lim_{|M_iM_{i+1}| \to 0}\sum_{i=0}^{n-1}(a(M_i), M_iM_{i+1}).$$

Зауваження. Також лінійний інтеграл уздовж шляху позначають так:

$$\int_{AB}(a, dl) = \int_{AB} adl.$$

Лінійний інтеграл називають *роботою* векторного поля a вздовж шляху AB.

Означення. Векторне поле a називається *потенціальним*, якщо робота не залежить від форми шляху $AB,$ а лише від його початку та кінця.

Очевидно, що робота векторного потенціального поля вздовж замкненого шляху дорівнює нулю.

Означення. Робота векторного поля a вздовж замкненого шляху γ називається *циркуляцією* векторного поля a вздовж цього шляху і позначається

$$Ц = \int_{\gamma}(a, dl).$$

Зауваження. У літературі часто, щоб наголосити, що інтеграл обчислюється по замкненому шляху, циркуляцію позначають так

$$Ц = \oint_{\gamma}(a, dl).$$

Теорема. Для того, щоб векторне поле a було потенціальним необхідно і достатньо, щоб диференціальна форма

$$a_x dx + a_y dy + a_z dz$$

була повною, тобто, щоб існувало таке скалярне поле u, що

$$du = a_x dx + a_y dy + a_z dz.$$

Обчислення лінійного інтеграла

Нехай в області, що містить криву l задано векторне поле

$$a = a_x(x, y, z)i + a_y(x, y, z)j + a_z(x, y, z)k$$

Припустимо, що крива l задана параметрично системою

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t),\ t \in I = [\alpha, \beta]. \\ z = z(t). \end{cases}$$

Тоді робота векторного поля a вздовж шляху l визначається формулою

$$\int_l (a, dl) = \int_l a_x(x, y, z)dx + a_y(x, y, z)dy + a_z(x, y, z)dz =$$
$$= \int_\alpha^\beta \Big(a_x(x(t), y(t), z(t))x'(t) + a_y(x(t), y(t), z(t))y'(t) + \tag{4.4}$$
$$+ a_z(x(t), y(t), z(t))z'(t) \Big) dt.$$

Якщо шлях l задається сім'єю рівнянь

$$\begin{cases} y = y(x) \\ z = z(x) \end{cases},\ x \in I = [\alpha, \beta],$$

Тоді з формули (4.4) отримуємо формулу

$$\int_l (a, dl) =$$
$$= \int_\alpha^\beta \Big(a_x(x, y(x), z(x)) + a_y(x, y(x), z(x))y'(x) + a_z(x, y(x), z(x))z'(x) \Big) dx. \tag{4.5}$$

Аналогічно визначаються формули для обчислення роботи, якщо шлях задається сім'єю рівнянь

$$\begin{cases} x = x(y) \\ z = z(y) \end{cases},\ y \in I, \text{ чи } \begin{cases} x = x(z) \\ y = y(z) \end{cases},\ z \in I.$$

Поверхневий інтеграл. Потік векторного поля

Нехай в області $D \subset \mathbb{R}^3$ задано поверхню $S \subset D,$ таку, що в кожній її точці існує дотична до S площина, яка неперервно змінюється на $S.$ Таку поверхню будемо називати *гладкою*. Якщо на поверхні S вибрано один з двох боків, то таку поверхню називають *орієнтованою*. Нехай n^0 – орт нормалі до поверхні $S,$ котрий направлений у бік згідно з вибраною орієнтацією поверхні (Рис. 4.2).

Нехай в околі поверхні S задано векторне поле a

$$a = a_x(x, y, z)i + a_y(x, y, z)\, j + a_z(x, y, z)k.$$

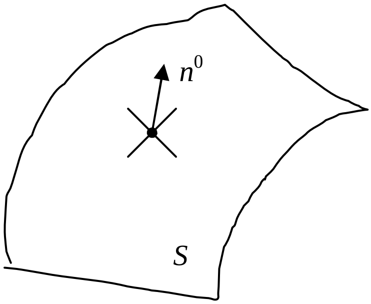

Рис. 4.2.

Розіб'ємо поверхню S на настільки дрібні фрагменти $S_i,$ що кожна з S_i майже не відрізняється від фрагмента деякої площини. Для кожної S_i виберемо довільну точку $M_i \in S_i.$ Нехай $n^0(M_i)$ – нормаль до S_i у точці $M_i.$

Означення. Поверхневим інтегралом від векторного поля a через орієновану поверхню S називається границя

$$\iint_S (a, n^0) dS = \lim_{dS_i \to 0} \sum_i (a(M_i), n^0(M_i)) dS_i = \\ = \lim_{dS_i \to 0} \sum_i \mathit{Пр}\big|_{n^0}\, a(M_i) \cdot dS_i, \tag{4.6}$$

де dS_i площа поверхні S_i.

Фізичний зміст поверхневого інтеграла

Припустимо, що векторне поле a – це поле швидкостей течії деякої рідини. Будемо вважати, що рідина не стискається під час руху. Розглянемо довільний фрагмент S_i поверхні S. Тоді за одиницю часу через поверхню S_i протече

$$Пр\big|_{n^0} a(M_i)\cdot dS_i = (a(M_i), n^0(M_i))dS_i$$

рідини. Провівши аналогічні міркування щодо всієї поверхні S, можемо зробити висновок, що через усю поверхню S за одиницю часу протече $\iint\limits_S (a, n^0)dS$ рідини.

Означення. Поверхневий інтеграл $\iint\limits_S (a, n^0)dS$ векторного поля a через орієнтовану поверхню S називають *потоком* векторного поля a через орієнтовану поверхню S.

Способи обчислення потоку

Нехай в околі гладкої орієнтованої поверхні S задано векторне поле a

$$a = a_x(x,y,z)i + a_y(x,y,z)\,j + a_z(x,y,z)k.$$

Нехай n^0 – орт нормалі до поверхні S, котрий направлений у бік згідно з вибраною орієнтацією поверхні. Будемо вважати, що цей орт нормалі задано своїми напрямними косинусами

$$n^0 = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma).$$

Тоді

$$\iint\limits_S (a, n^0)dS = \iint\limits_S \Big(a_x(x,y,z)\cos\alpha + a_y(x,y,z)\cos\beta + a_z(x,y,z)\cos\gamma\Big)dS. \quad (4.7)$$

1. Проектування на одну з координатних площин

Нехай поверхня S взаємно однозначно проектується на координатну площину Oxy (Рис. 4.3)

$$D_{xy} = Пр\big|_{Oxy} S.$$

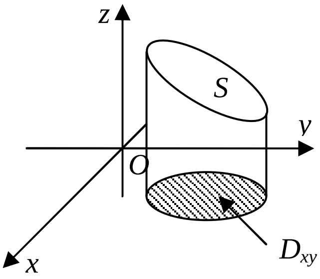

Рис. 4.3.

Тоді поверхню S можна задати як функцію

$$z = f(x, y),\ (x, y) \in D_{xy}.$$

Оскільки

$$|\cos\gamma|\, dS = dxdy,$$

то

$$dS = \frac{dxdy}{|\cos\gamma|}.$$

Тоді формулу (4.7) можна переписати у такому вигляді

$$\iint_S (a, n^0) dS = \iint_{D_{xy}} \left.\frac{(a, n^0)}{|\cos\gamma|}\right|_{z = f(x,y)} dxdy, \qquad (4.8)$$

де вектор n^0 визначається із співвідношення

$$n^0 = \pm \frac{grad(z - f(x, y))}{|grad(z - f(x, y))|}, \qquad (4.9)$$

а $\cos\gamma$ – це третя координата у векторі n^0

$$\cos\gamma = \pm \frac{1}{|grad(z - f(x, y))|}. \qquad (4.10)$$

В останніх двох формулах вибирається знак "+", якщо вектор n^0 утворює гострий кут з віссю Oz, і "–" – якщо тупий.

Аналогічно отримуються формули для обчислення потоку, якщо поверхня S взаємнооднозначно проектується на координатні площини Oxz чи Oyz.

Нехай

$$D_{xz}=\Pi p\big|_{Oxz}S,\ y=f(x,z),\ (x,z)\in D_{xz},$$
$$D_{yz}=\Pi p\big|_{Oyz}S,\ x=f(y,z),\ (y,z)\in D_{yz}.$$

Тоді

$$\iint\limits_{S}(a,n^0)dS=\iint\limits_{D_{xz}}\frac{(a,n^0)}{|\cos\beta|}\bigg|_{y=f(x,z)}dxdz.$$
$$\iint\limits_{S}(a,n^0)dS=\iint\limits_{D_{yz}}\frac{(a,n^0)}{|\cos\alpha|}\bigg|_{x=f(y,z)}dydz.$$

2. Проектування на всі три координатні площини

Нехай поверхня S взаємно однозначно проектується на всі три координатні площини.

$$D_{xy}=\Pi p\big|_{Oxy}S,\ \ D_{xz}=\Pi p\big|_{Oxz}S,\ \ D_{yz}=\Pi p\big|_{Oyz}S.$$

Тоді поверхню S можна задати одним із трьох способів

$$x=x(y,z),\ (y,z)\in D_{yz},$$
$$y=y(x,z),\ (x,z)\in D_{xz},$$
$$z=z(x,y),\ \ (x,y)\in D_{xy}.$$

і

$$\cos\alpha dS=\pm dydz,$$
$$\cos\beta dS=\pm dxdz,$$
$$\cos\gamma dS=\pm dxdy,$$

де знак "$+$" чи "$-$" вибирається таким самим, як і знак при відповідному косинусі. Тоді формула для обчислення потоку набуде вигляду

$$\iint\limits_{S}(a,n^0)dS=\pm\iint\limits_{D_{yz}}a_x(x(y,z),y,z)dydz\pm$$
$$\pm\iint\limits_{D_{xz}}a_y(x,y(x,z),z)dxdz\pm\iint\limits_{D_{xy}}a_z(x,y,z(x,y))dxdy \tag{4.11}$$

3. Потік через замкнену поверхню. Формула Гауса-Остроградського

Нехай S – деяка замкнена поверхня, що обмежує область $\Omega_S \subset \mathbb{R}^3$. n^0 - орт зовнішньої нормалі до поверхні S. Нехай в замиканні області Ω_S задано векторне поле

$$a = a_x(x,y,z)i + a_y(x,y,z)j + a_z(x,y,z)k,$$

таке, для якого існують частинні похідні

$$\frac{\partial a_x}{\partial x}, \frac{\partial a_y}{\partial y}, \frac{\partial a_z}{\partial z}.$$

Тоді має місце

Теорема. (Формула Гауса-Остроградського)

$$\iint_S (a, n^0) dS = \iiint_{\Omega_S} \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) dxdydz \qquad (4.12)$$

Дивергенція векторного поля

Нехай в околі точки M задане векторне поле a. Оточимо точку M деякою замкненою поверхнею S, наприклад, сферою з центром у точці M, і виберемо зовнішню орієнтацію для S.

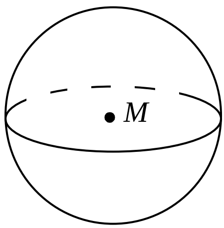

Рис. 4.4.

Нехай Ω_S – область, що обмежується поверхнею S, а V_S – її об’єм. Нехай n^0 – одиничний вектор зовнішньої нормалі до S.

Означення. *Дивергенцією* векторного поля a у точці M називається така границя

$$div\, a(M) = \lim_{\Omega_S \to M} \frac{\iint\limits_S (a, n^0) dS}{V_S}.$$

Дивергенцію ще називають *об'ємною густиною потоку*.

Використовуючи теорему про середнє значення і формулу Гаусса-Остроградського, отримаємо

$$div\, a(M) = \frac{\partial a_x(M)}{\partial x} + \frac{\partial a_y(M)}{\partial y} + \frac{\partial a_z(M)}{\partial z}$$

або у компактнішому вигляді

$$div\, a = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}.$$

Зауваження. Для запису дивергенції зручно користуватися оператором Гамільтона ∇

$$div\, a = (\nabla, a).$$

Використовуючи дивергенцію, формулу Гаусса-Остроградського (4.12) записують у компактнішому вигляді

$$\iint\limits_S (a, n^0) dS = \iiint\limits_{\Omega_S} div\, a\, dxdydz. \qquad (4.13)$$

Означення. Точка M простору називається *джерелом*, якщо $div\, a(M) > 0.$

Означення. Точка M простору називається *стоком*, якщо $div\, a(M) < 0.$

Означення. Векторне поле a називається *соленоїдальним* в області D, якщо у всіх точках області D $div\, a = 0.$

Теорема. Нехай a – соленоїдальне в області D векторне поле. Тоді потік через довільну замкнену поверхню $S \subset D$ дорівнює нулю.

Властивості дивергенції

Нехай a, b – векторні поля, u – скалярне поле. Тоді

- $div(a+b) = div\, a + div\, b;$
- $div(ua) = u\, div\, a + (\nabla u, a).$

Ротор (вихор) векторного поля

Нехай в області $D \subset \mathbb{R}^3$ задано векторне поле

$$a = a_x(x,y,z)i + a_y(x,y,z)j + a_z(x,y,z)k,$$

таке, що функції $a_x, a_y, a_z \in C^1(D).$

Означення. Ротором (вихором) векторного поля a називається вектор

$$rot\, a = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)i + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)j + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)k. \tag{4.14}$$

Зауваження. Для легшого запам'ятовування формули (4.14) її записують у символьній (операторній) формі

$$rot\, a = [\nabla, a] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$$

і розуміють у сенсі розкриття визначника за першим рядком.

Геометричний зміст ротора

Нехай в області $D \subset \mathbb{R}^3$ задано векторне поле

$$a = a_x(x,y,z)i + a_y(x,y,z)j + a_z(x,y,z)k.$$

Розглянемо довільну точку M з області D. Нехай n^0 – довільний орт. У площині перпендикулярній до орта n^0 побудуємо замкнений контур C_M, що містить всередині точку M. Орієнтацію на контурі виберемо так, щоб з вершини вектора n^0 обхід спостерігався проти годинникової стрілки (Рис. 4.5).

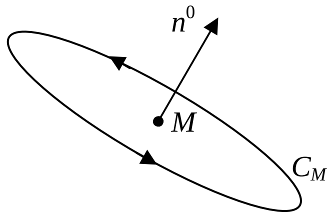

Рис. 4.5.

Розглянемо відношення циркуляції векторного поля a вздовж контура C_M до площі області S_M, що обмежена цим контуром

$$\frac{\int\limits_{C_M}(a,dl)}{S_M}.$$

Тоді проекція на n^0 ротора у точці M – це границя вищенаведеного відношення при стягуванні контура C_M у точку M:

$$(rot\,a,n^0)=\Pi p\big|_{m^0} rot\,a=\lim_{C_M\to M}\frac{\int\limits_{C_M}(a,dl)}{S_M},$$

де S_M – площа області обмеженої контуром C_M.

З геометричної інтерпретації ротора можна зробити висновок, що якщо векторне поле є потенціальним у області D, то його ротор у будь-якій точці області D є нульовим вектором. Зворотне твердження також має місце і випливає з формули Стокса.

Формула Стокса

Теорема. Нехай C – деякий замкнений контур із заданим способом обходу його точок. Нехай S_C – довільна поверхня, натягнена на контур C як на межу: $\partial S_C = C$, а n^0 – орт нормалі до поверхні S_C, направлений так, що з вершини вектора n^0 обхід по контуру C спостерігається проти годинникової стрілки. Тоді для довільного векторного поля a, визначеного в околі поверхні S_C, має місце співвідношення

$$\int_C (a, dl) = \iint_{S_C} (rot\, a, n^0) dS.$$

Наслідок. Для того, щоб векторне поле a було потенціальним в області D, необхідно і досить, щоб у всіх точках області D виконувалося співвідношення

$$rot\, a = 0.$$

Тема 5. Символічні методи та операції другого порядку

..

Символічний метод для диференціальних операцій першого порядку

Для диференціальних операцій введених вище використовувався символічний векторний оператор Гамільтона – оператор ∇ (набла):

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k. \tag{5.1}$$

Цей оператор наділений як векторними, так і диференціальними властивостями. Нехай u – скалярне поле, a – векторне поле. Тоді

$$\nabla u = grad\ u;\ (\nabla, a) = div\ a;\ [\nabla, a] = rot\ a.$$

Означення. Операції $grad$, div, rot називаються у векторному аналізі *операціями першого порядку*, оскільки оператор Гамільтона ∇ входить до них лише один раз.

Оператор ∇ можна трактувати як деякий символічний вектор, визначений співвідношенням (5.1), що задовольняє дистрибутивний закон і у якому наявні як диференціальні, так і векторні властивості. Це дозволило створити символьний метод, основні правила якого такі:

1) Оператор ∇ є абстрактний символічний вектор, що діє через операції множення на скалярні або векторні величини. Його не можна використовувати самостійно у формулі – за ним повинна іти величина, на яку він діє.
2) Усі величини (векторні чи скалярні), на які оператор набла не діє, повинні у формулі стояти зліва від оператора набла, а ті, на які він діє, – справа.
3) Якщо оператор набла діє на добуток, то насамперед діють його диференціальні властивості, а вже потім векторні.

Зауваження. Якщо у формулі потрібно вказати, що оператор набла не діє на деяку зі змінних величин у складній формулі, то цю величину позначають індексом c (скорочення від $const$):

$$\nabla u v_c = v \nabla u.$$

Диференціальні операції другого порядку

Крім диференціальних операцій першого порядку, в математиці та фізиці часто використовують операції, у яких оператор Гамільтона ∇ входить два рази. Такі операції називають *операціями другого порядку*.

I) Нехай в області D задано скалярне поле u.

Побудуємо в кожній точці області D векторне поле $a = grad\, u$. Обчислимо дивергенцію і ротор від отриманого векторного поля

$$div\, a = div\, grad\, u = (\nabla, \nabla u); \tag{5.2}$$

$$rot\, a = rot\, grad\, u = [\nabla, \nabla u]. \tag{5.3}$$

II) Нехай в області D задано векторне поле a.

Побудуємо в кожній точці скалярне поле $u = div\, a$. Обчислимо градієнт від отриманого скалярного поля

$$grad\, u = grad\, div\, a = \nabla(\nabla, a). \tag{5.4}$$

III) Нехай в області D задано векторне поле a.

Побудуємо в кожній точці векторне поле $W = rot\, a$. Обчислимо дивергенцію і ротор отриманого векторного поля.

$$div W = div\, rot\, a = (\nabla, [\nabla, a]); \tag{5.5}$$

$$rot W = rot\, rot\, a = [\nabla, [\nabla, a]]. \tag{5.6}$$

(5.2) – (5.6) – основні п'ять операцій другого порядку у векторному аналізі. Зупинимося детальніше на кожній з них.

1). $div\, a = div\, grad\, u = (\nabla, \nabla u) = (\nabla, \nabla) u = \nabla^2 u.$

Означення. Оператор $\Delta := \nabla^2$ називають *оператором Лапласа*

$$\Delta := \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Зауваження. Оператор Лапласа можна покоординатно застосовувати до векторного поля:

$$\Delta a = \Delta a_x i + \Delta a_y j + \Delta a_z k.$$

2) $rot\, grad\, u = [\nabla, \nabla u] = [\nabla, \nabla] u = 0.$

У символічному записі отримали дуже важливий результат, який узгоджується з теоремою про те, що ротор від потенціального векторного поля є нуль.

3) $grad\, div\, a = \nabla(\nabla, a).$

$$\nabla(\nabla, a) = \left(\frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k\right)\left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 a_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial x \partial z}\right) i + \left(\frac{\partial^2 a_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial y \partial z}\right) j +$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 a_x}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial z^2}\right) k.$$

4) $div\, rot\, a = (\nabla, [\nabla, a]) = ([\nabla, \nabla], a) = 0.$

5) $rot\, rot\, a = [\nabla, [\nabla, a]].$

Тут скористаємося властивістю подвійного векторного добутку

$$[a, [b, c]] = (a, c) b - (a, b) c.$$

Тоді

$$[\nabla, [\nabla, a]] = \nabla(\nabla, a) - (\nabla, \nabla) a = grad\, div\, a - \Delta a.$$

Отримані результати запишемо у вигляді таблиці.

	Скалярне поле u	Векторне поле a	
	$grad$	div	rot
$grad$	–	$\nabla(\nabla, a)$	–
div	Δu	–	0
rot	0		$grad\, div\, a - \Delta a$

Тема 6. Криволінійні системи координат

Досі кожна точка простору визначалася трьома числами (x, y, z) – своїми координатами прямокутної декартової системи координат. Проте, у багатьох задачах зручніше використовувати дещо іншу систему ідентифікації точок. І тоді поруч із прямокутною декартовою системою координат $Oxyz$ розглядають деяку криволінійну систему координат.

Означення. Якщо кожній точці простору можна поставити у відповідність трійку чисел (u, v, w) і навпаки кожній трійці чисел (u, v, w) відповідає єдина точка простору, то кажуть, що в просторі задано *криволінійну систему координат*, а числа (u, v, w) називаються *криволінійними координатами*.

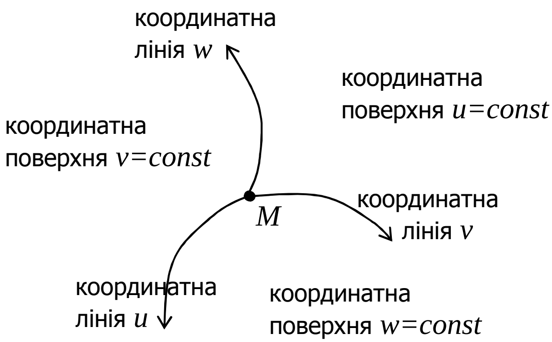

Рис. 6.1. Криволінійна система координат

Поверхня, на якій u, v або w зберігає стале значення, називається координатною поверхнею (Рис. 6.1)

- $w = const$ – координатна поверхня uv;
- $v = const$ – координатна поверхня uw;
- $u = const$ – координатна поверхня vw.

Перетин двох з трьох координатних поверхонь називається *координатною лінією* (Рис. 6.1).

- перетин $v = const$ і $w = const$ утворює координатну лінію u;

- перетин $u = const$ і $w = const$ утворює координатну лінію v;
- перетин $u = const$ і $v = const$ утворює координатну лінію w.

Очевидно, що якщо координатні поверхні $v = const$ і $w = const$ не змінюються, то точка буде рухатися по координатній лінії u.

Кожна точка простору є перетином трьох координатних поверхонь

$$u = c_u, v = c_v, w = c_w,$$

а числа c_u, c_v, c_w і є її криволінійними координатами.

У кожній точці простору введемо трійку одиничних векторів (e_u, e_v, e_w), які є дотичними векторами до координатних ліній u, v і w відповідно, і направлені в сторону зростання відповідних координат (Рис. 6.2).

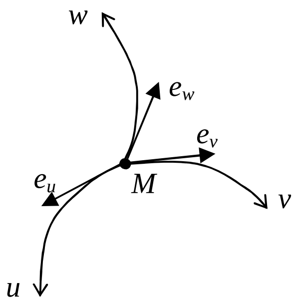

Рис. 6.2. Базисні орти криволінійної системи координат

Зауваження. Для декартової системи координат ця трійка векторів є однаковою для всіх точок простору і позначається (i, j, k). У криволінійній системі для кожної точки простору визначається своя трійка ортів.

Вектори e_u, e_v, e_w будемо брати у такому порядку, щоб вони утворювали праву трійку. Трійку e_u, e_v, e_w називають *базисними ортами* (або *базисними векторами*) *криволінійної системи координат* у точці M простору.

Означення. Криволінійна система координат, для якої в кожній точці простору трійка ортів e_u, e_v, e_w є попарно перпендикулярною, називається *ортогональною*.

Зауваження. У цьому курсі векторного аналізу будемо використовувати лише ортогональні системи координат.

Елементарні переміщення

Означення

Розглянемо ортогональну систему координат (u, v, w). Виберемо довільну точку M_0, нехай (u_0, v_0, w_0) – її координати. Перемістимо точку M_0 уздовж координатної лінії u на досить малу величину (настільки малу, що рух можна вважати прямолінійним) у положення M_u Тоді переміщення, яке пройде точка M_0 (Рис. 6.3), буде

$$M_0 M_u = dS_u$$

і називається *елементарним переміщенням* уздовж координатної лінії u.

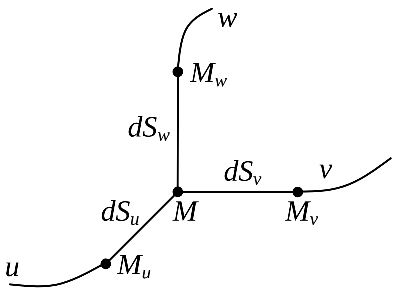

Рис. 6.3. Елементарні переміщення

Аналогічно визначаються елементарні переміщення dS_v і dS_w уздовж координатних ліній v і w відповідно (Рис. 6.3).

Отже, враховуючи ортогональність системи координат (u, v, w), елементарне переміщення вздовж усіх трьох координатних ліній визначається із співвідношення

$$dS^2 = dS_u^2 + dS_v^2 + dS_w^2,$$

а об'єм відповідного елементарного паралелепіпеда, побудованого на $M_0 M_u$, $M_0 M_v$, $M_0 M_w$ як на ребрах, визначається за формулою

$$dV_{dS} = dS_u dS_v dS_w.$$

Обчислення елементарних дуг

Нехай відомо формули переходу з декартової системи координат у криволінійну і навпаки

$$\begin{aligned} x &= x(u,v,w), \\ y &= y(u,v,w), \\ z &= z(u,v,w). \end{aligned} \tag{6.1}$$

$$\begin{aligned} u &= u(x,y,z), \\ v &= v(x,y,z), \\ w &= w(x,y,z). \end{aligned} \tag{6.2}$$

Причому всі функції у вищенаведених співвідношеннях є взаємно однозначними, неперервними та один раз диференційованими.

Виберемо довільну точку M_0 простору. Нехай r – її радіус-вектор. Тоді

$$r = xi + yj + zk = x(u,v,w)i + y(u,v,w)j + z(u,v,w)k = r(u,v,w).$$

Нехай переміщення радіус-вектора відбувається вздовж координатної лінії u, тобто зафіксуємо координатні поверхні $v = v_0 = const$ і $w = w_0 = const.$ Тоді

$$r = r(u, v_0, w_0)$$

це параметричне рівняння координатної лінії u, а $\dfrac{\partial r}{\partial u}$ – дотичний вектор до координатної лінії u. Отже,

$$\frac{\partial r}{\partial u} \parallel e_u,$$

звідки, позначивши

$$H_u := \left|\frac{\partial r}{\partial u}\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2}, \tag{6.3}$$

випливає співвідношення

$$\frac{\partial r}{\partial u} = \left|\frac{\partial r}{\partial u}\right| \cdot e_u = H_u e_u.$$

Тоді

$$dS_u = |dr| = \left|\frac{\partial r}{\partial u}du\right| = \left|\frac{\partial r}{\partial u}\right|du = H_u du. \qquad (6.4)$$

Аналогічно визначаються числа H_v і H_w й елементарні переміщення dS_v і dS_w

$$H_v := \left|\frac{\partial r}{\partial v}\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2}, \qquad (6.5)$$

$$H_w := \left|\frac{\partial r}{\partial w}\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)^2}, \qquad (6.6)$$

$$dS_v = \left|\frac{\partial r}{\partial v}\right|dv = H_v dv, \qquad (6.7)$$

$$dS_w = \left|\frac{\partial r}{\partial w}\right|dv = H_w dw. \qquad (6.8)$$

Означення. Числа H_u, H_v і H_w називаються коефіцієнтами Ляме або масштабними множниками.

Маючи коефіцієнти Ляме, легко записувати величини елементарних дуг або об'ємів елементарних паралелепіпедів у криволінійній системі координат

$$dS^2 = dS_u^2 + dS_v^2 + dS_w^2 = H_u^2 du^2 + H_v^2 dv^2 + H_w^2 dw^2,$$

$$dV_{dS} = dS_u dS_v dS_w = H_u H_v H_w dudvdw.$$

Диференціальні операції в криволінійних системах координат

Градієнт

Нехай у криволінійній системі координат задано скалярне поле $\varphi = \varphi(u, v, w)$. Тоді вектор градієнта

$$G = G_u e_u + G_v e_v + G_w e_w$$

можна визначити із співвідношення

$$G = \frac{\partial \varphi}{\partial S_u} e_u + \frac{\partial \varphi}{\partial S_v} e_v + \frac{\partial \varphi}{\partial S_w} e_w.$$

Тоді з (6.4), (6.7), (6.8) випливає

$$\frac{du}{dS_u} = \frac{1}{H_u}, \quad \frac{dv}{dS_v} = \frac{1}{H_v}, \quad \frac{dw}{dS_w} = \frac{1}{H_w}.$$

Підставляючи отримані рівності у формулу для обчислення G, отримаємо

$$G = \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{du}{dS_u} e_u + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{dv}{dS_v} e_v + \frac{\partial \varphi}{\partial w}\frac{dw}{dS_w} e_w,$$

звідки

$$grad\,\varphi = \frac{1}{H_u}\frac{\partial \varphi}{\partial u} e_u + \frac{1}{H_v}\frac{\partial \varphi}{\partial v} e_v + \frac{1}{H_w}\frac{\partial \varphi}{\partial w} e_w. \qquad (6.9)$$

Дивергенція

Нехай у просторі задано векторне поле

$$a = a_u(u,v,w)e_u + a_v(u,v,w)e_v + a_w(u,v,w)e_w$$

Визначимо дивергенцію цього поля в довільній точці M простору. Розглянемо елементарний паралелепіпед P_M, що містить точку M. Нехай S_M – бічна поверхня цього паралелепіпеда, а dV_M – його об'єм. Тоді

$$dV_M = H_u H_v H_w du dv dw.$$

Згідно з означенням,

$$div\, a(M) = \lim_{P_M \to M} \frac{\iint\limits_{S_M} (a, n^0) dS}{dV_M} =$$

$$= \lim_{P_M \to M} \frac{\iint\limits_{S_M} (a_u \cos\alpha + a_v \cos\beta + a_w \cos\gamma) dS}{H_u H_v H_w du dv dw}.$$

Оскільки

$$\pm\cos\alpha dS = dS_v dS_w = H_v H_w dv dw = \pm\cos\alpha d\mu,$$

$$\pm\cos\beta dS = dS_u dS_w = H_u H_w du dw = \pm\cos\beta d\mu,$$
$$\pm\cos\gamma dS = dS_u dS_v = H_u H_v du dv = \pm\cos\gamma d\mu.$$

Тоді

$$diva =$$
$$= \frac{1}{H_u H_v H_w} \lim_{P_M \to M} \frac{\iint\limits_{S_M} (a_u H_v H_w \cos\alpha + a_v H_u H_w \cos\beta + a_w H_u H_v \cos\gamma) d\mu}{du dv dw}.$$

Скориставшись формулою Гауса-Остроградського, отримаємо

$$diva =$$
$$= \frac{1}{H_u H_v H_w} \lim_{P_M \to M} \frac{\iint\limits_{S_M} \left(\frac{\partial}{\partial u}(a_u H_v H_w) + \frac{\partial}{\partial v}(a_v H_u H_w) + \frac{\partial}{\partial w}(a_w H_u H_v) \right) du dv dw}{du dv dw}.$$

Використовуючи теорему про середнє значення, з останньої формули остаточно отримаємо

$$diva = \frac{1}{H_u H_v H_w} \left(\frac{\partial}{\partial u}(a_u H_v H_w) + \frac{\partial}{\partial v}(a_v H_u H_w) + \frac{\partial}{\partial w}(a_w H_u H_v) \right). \qquad (6.10)$$

Ротор

Нехай в області $D \subset \mathbb{R}^3$, у криволінійних координатах задано векторне поле

$$a = a_u(u, v, w) e_u + a_v(u, v, w) e_v + a_w(u, v, w) e_w .$$

Визначимо ротор цього векторного поля у довільній точці M області D, користуючись геометричним змістом. Нагадаємо, що якщо n^0 – довільний орт, а C_M – замкнений контур, що лежить у площині, перпендикулярній до орта n^0, містить всередині точку M і має орієнтацію таку, що з вершини вектора n^0 обхід спостерігається проти годинникової стрілки (Рис. 6.4), то

$$(rot\, a, n^0) = Пр\big|_{n^0} rot\, a = \lim_{C_M \to M} \frac{\int\limits_{C_M} (a, dl)}{S_M}, \qquad (6.11)$$

де S_M – площа області обмеженої контуром C_M.

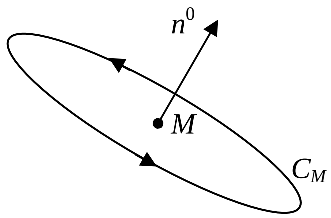

Рис. 6.4.

Нехай

$$rot\,a = W = W_u(u,v,w)e_u + W_v(u,v,w)e_v + W_w(u,v,w)e_w$$

Тоді

$$(rot\,a, e_u) = \Pi p\Big|_{e_u} W = W_u.$$

Розглянемо елементарний паралелепіпед, що містить точку M. Без обмеження загальності можемо вважати, що точка M є вершиною A паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$

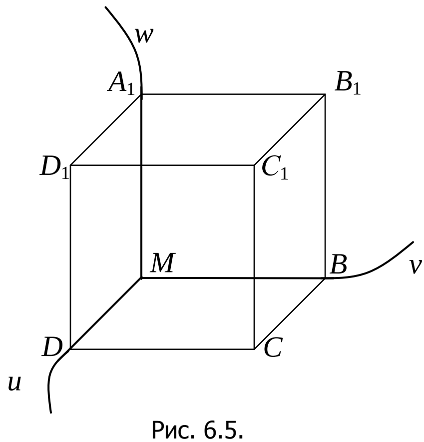

Рис. 6.5.

Тоді розглянемо циркуляцію векторного поля a вздовж контура MBB_1A_1

$$\int\limits_{MBB_1A_1} (a, dl) = \int\limits_{MBB_1A_1} a_u dS_u + a_v dS_v + a_w dS_w.$$

Оскільки при обході контура MBB_1A_1 координата u не змінюється, то $dS_u = 0.$ Таким чином,

$$\int\limits_{MBB_1A_1} (a, dl) = \int\limits_{MBB_1A_1} a_v dS_v + a_w dS_w = \int\limits_{MBB_1A_1} a_v H_v dv + a_w H_w dw = \int\limits_{MBB_1A_1} (\tilde{a}, d\tilde{l}),$$

де

$$\tilde{a} = (0, a_v H_v, a_w H_w),$$
$$d\tilde{l} = (du, dv, dw).$$

Використовуючи формулу Стокса, отримаємо

$$\int\limits_{MBB_1A_1} (\tilde{a}, d\tilde{l}) = \iint\limits_{S_{MBB_1A_1}} \left(rot\,\tilde{a}, e_u \right) dvdw. \qquad (6.12)$$

Підставляючи (6.12) в (6.11) і використовуючи теорему про середнє значення, отримаємо

$$W_u = (rot\, a, e_u) = \lim_{MBB_1A_1 \to M} \frac{\iint\limits_{S_{MBB_1A_1}} \left(\frac{\partial}{\partial v}(H_w a_w) - \frac{\partial}{\partial w}(H_v a_v) \right) dvdw}{H_v H_w dvdw} =$$
$$\frac{1}{H_v H_w} \left(\frac{\partial}{\partial v}(H_w a_w) - \frac{\partial}{\partial w}(H_v a_v) \right).$$

Аналогічно, розглядаючи грані MA_1D_1D і $MDCB,$ отримаємо вирази для W_v і $W_w.$

Остаточно запишемо вираз для знаходження ротора у криволінійній системі координат за допомогою символьного виразу

$$rot\, a = \begin{vmatrix} \frac{e_u}{H_v H_w} & \frac{e_v}{H_u H_w} & \frac{e_w}{H_u H_v} \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \\ H_u a_u & H_v a_v & H_w a_w \end{vmatrix}, \qquad (6.13)$$

який будемо розуміти в сенсі розкриття визначника за першим рядком.

Оператор Лапласа

Нехай $\varphi = \varphi(u, v, w)$ – скалярне поле, задане у криволінійній системі координат. Як відомо,

$$\Delta\varphi = div\, grad\, \varphi.$$

Оскільки

$$grad\, \varphi = \frac{1}{H_u}\frac{\partial\varphi}{\partial u}e_u + \frac{1}{H_v}\frac{\partial\varphi}{\partial v}e_v + \frac{1}{H_w}\frac{\partial\varphi}{\partial w}e_w,$$

то

$$\begin{aligned}\Delta\varphi = \frac{1}{H_u H_v H_w}\Bigg(\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{H_v H_w}{H_u}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right) + \\ + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{H_u H_w}{H_v}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{H_u H_v}{H_w}\frac{\partial\varphi}{\partial w}\right)\Bigg).\end{aligned} \tag{6.14}$$

Тема 7. Гідромеханічне тлумачення аналітичних функцій

....

Плоскі векторні поля зручно вивчати, якщо систему координат ввести так, щоб площина векторного поля збігалася з площиною Oxy або була паралельною до неї. Тоді площину Oxy ототожнюють з комплексною площиною $\mathbb{C}$, а векторне поле задають як комплексну функцію змінних x, y.

$$a = a_x(x,y) + ia_y(x,y). \tag{7.1}$$

Лінії течії

Розглянемо автономну систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_x(x,y), \\ \dfrac{dy}{dt} = a_y(x,y), \end{cases} \quad t \in [a,b]. \tag{7.2}$$

Параметр t, як правило, інтерпретують як час.

Означення. *Лініями течії* векторного поля a, визначеного співвідношенням (7.1), називають фазові траєкторії системи (7.2), тобто криві вигляду $x(t) = \varphi(t)$, $y(t) = \psi(t)$, $t \in [a,b]$, де $(\varphi(t), \psi(t))$ - розв'язок системи (7.2).

Властивості фазових траєкторій

Фазові траєкторії не перетинаються і через кожну точку простору проходить фазова траєкторія.

Означення. Точка (x_0, y_0), для якої векторне поле

$$a = a_x(x_0, y_0) + ia_y(x_0, y_0) = 0,$$

називається *точкою спокою* або *критичною точкою* для автономної системи (7.2).

Зауваження.

1. Лінія течії, що проходить через точку (x_0, y_0), складається тільки з цієї точки.

2. З (7.2) випливає, що лінії течії є векторними лініями векторного поля a .

Найважливішу задачу, яку вивчають з допомогою плоских векторних полів, це плоско-паралельний рух рідини.

Нехай у $\mathbb{C}$ або в $D \subset \mathbb{C}$ відбувається рух рідини. Тоді в кожній точці (x, y) можна розглядати вектор швидкостей частинок рідини

$$v_x(x, y) + iv_x(x, y) = v .$$

Тоді, якщо векторне поле визначається вектором v, то лінії течії – криві або траєкторії, по яких рухаються частинки рідини.

Потік і дивергенція

Означення. *Потоком* векторного поля a через замкнену криву γ називається інтеграл

$$\Pi = \int\limits_{\gamma} \left(a, n^0\right) dl ,$$

де γ додатноорієнтована, n^0 - одиничний вектор зовнішньої нормалі до γ, dl – елемент довжини кривої γ.

Якщо крива γ допускає параметризацію

$$\begin{matrix} x = x(t) \\ y = y(t) \end{matrix}, \ t \in [\alpha, \beta],$$

то очевидно, що вектор n^0 можна знайти зі співвідношення

$$n^0 = \pm \frac{i\left(x' + iy'\right)}{|\gamma'|} = \pm \frac{ix' - y'}{|\gamma'|} .$$

Тоді

$$\Pi = \int\limits_{\gamma} \left(a, n^0\right) dl = \pm \int\limits_{a}^{b} \frac{\left(a_x(-y') + a_y x'\right)}{|\gamma'|} |\gamma'| dt = \mp \int\limits_{\gamma} \left(-a_y dx + a_x dy\right).$$

Зауваження. Якщо n^0 – зовнішня нормаль до кривої γ, яка проходиться у додатному напрямку, то при визначенні потоку перед інтегралом треба вибрати знак "+"

$$\Pi = \int_\gamma \left(-a_y dx + a_x dy\right).$$

За формулою Гауса-Остроградського

$$\Pi = \int_\gamma \left(-a_y dx + a_x dy\right) = \iint_{\operatorname{int}\gamma} diva\,dxdy, \tag{7.3}$$

де $diva = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y}$ називається дивергенцією поля a, $\operatorname{int}\gamma$ – область обмежена кривою γ.

Циркуляція і ротор

Означення. *Циркуляцією* векторного поля $a = a_x + ia_y$ вздовж кривої γ називається інтеграл

$$Ц = \int_\gamma \left(a, dl\right) = \int_\gamma \left(a, \tau^0\right) |\, dl\,|,$$

де γ – обходиться у додатному напрямку, τ^0 - дотичний орт до γ, що орієнтований у бік проходження γ.

$$Ц = \int_\gamma \left(a, dl\right) = \int_\gamma a_x dx + a_y dy.$$

Скориставшись формулою Стокса, отримаємо

$$Ц = \int_\gamma a_x dx + a_y dy = \iint_{\operatorname{int}\gamma} \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} - \frac{\partial a_y}{\partial y}\right) dxdy\,. \tag{7.4}$$

Означення. Скалярна величина $\frac{\partial a_x}{\partial x} - \frac{\partial a_y}{\partial y}$ називається *ротором* плоского векторного поля

$$rot a = \frac{\partial a_x}{\partial x} - \frac{\partial a_y}{\partial y}.$$

Соленоїдальне і потенціальне векторне поле

Нехай у області D комплексної площини задано векторне поле a, визначене співвідношенням (7.1).

Означення. Векторне поле a називається *соленоїдальним* у області D, якщо для всіх точок області D поля виконується співвідношення

$$div a = 0.$$

З формули (7.3) випливає, що для соленоїдального векторного поля

$$\int_\gamma \left(-a_y dx + a_x dy\right) = 0$$

для довільного замкненого шляху γ, що лежить у області D. Це означає, що диференціальна форма $-a_y dx + a_x dy$ є повною. Тобто існує функція $v = v(x, y)$, для якої

$$dv = -a_y dx + a_x dy \qquad (7.5)$$

або

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -a_y, \ \frac{\partial v}{\partial y} = a_y. \qquad (7.6)$$

Означення. Функція $v(x, y)$, яка визначена співвідношенням (7.6), називається *функцією течії* соленоїдального векторного поля a.

Зауваження. Функція течії називається так, бо її лінії рівня збігаються з лініями течії векторного поля a

$$v(x, y) = c$$

Якщо векторне поле задано в однозв'язній області D, то функцію течії можна знайти однозначно з точністю до довільної сталої зі співвідношення

$$v(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} -a_y dx + a_x dy.$$

У загальному випадку функції течії знаходять зі співвідношення (7.6).

Під дією соленоїдального поля відбувається плоскопаралельний рух рідини без стискання.

Означення. Векторне поле a називається *потенціальним* у області D, якщо циркуляція цього поля вздовж довільної замкненої кривої дорівнює нулю

$$Ц = \int_{\gamma} a_x dx + a_y dy = 0 .$$

Із співвідношення (7.4) отримаємо, що векторне поле є потенціальними у області D тоді і лише тоді, коли

$$rot a = 0.$$

Це означає, що диференційна форма $a_x dx + a_y dy$ є повною, тобто існує функція $u = u(x, y)$, для якої

$$du = a_x dx + a_y dy \tag{7.7}$$

або

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a_x , \ \frac{\partial u}{\partial y} = a_y . \tag{7.8}$$

Означення. Функція u, визначена співвідношенням (7.8), називається *потенціалом* або *силовою функцією* векторного поля a .

Означення. Лінії рівня потенціалу $u(x, y) = c$ називаються *еквіпотенціальними рівнями* або *лініями сталого потенціалу*.

Якщо векторне поле a визначене в однозв'язній області D, то потенціал однозначно з точністю до довільної сталої можна знайти із співвідношення

$$u(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} a_x dx + a_y dy$$

У загальному випадку потенціал знаходять зі співвідношення (7.8).

Гармонічні векторні поля та комплексний потенціал

Означення. Якщо векторне поле a є одночасно і соленоїдальним, і потенціальним в області D, то кажуть, що воно називається *гармонічним* у D.

З формул (7.6) і (7.8) отримаємо, що для гармонічного векторного поля мають одночасно виконуватися співвідношення

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a_x = \frac{\partial v}{\partial y},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = a_y = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

або

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \qquad (7.9)$$

Співвідношення (7.9) – це загальновідомі умови Коші-Рімана, що є складовою критерія диференційованості комплексної функції.

Отже, для гармонічного в області D векторного поля існують функції u – потенціал і v – функція течії, які є гармонічно спряженими функціями. Тоді комплексна функція $f = u + iv$ є аналітичною в області D функцією.

Означення. Функція $f = u + iv$ називається *комплексним потенціалом* гармонічного векторного поля a.

Зауваження. По комплексному потенціалу визначаються всі характеристики векторного поля.

Властивості:

Нехай $f = u + iv$ є комплексним потенціалом гармонічного векторного поля $a = a_x + ia_y$.

1. $a = \overline{f'}$.

Доведення.

$$f = u + iv \Rightarrow f' = \frac{\partial}{\partial x} f = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = a_x - ia_y \Rightarrow \overline{f'} = a_x + ia_y$$

2. $Ц + iП = \int\limits_{\gamma} f'(z)dz$.

Доведення.

$$Ц + iП = \int\limits_{\gamma} \frac{\partial f}{\partial x}(dx + idy) = \int\limits_{\gamma}\left(\frac{\partial}{\partial x}u + i\frac{\partial}{\partial x}v\right)(dx + idy) =$$

$$\int\limits_{\gamma} a_x dx + a_y dy + i\int\limits_{\gamma} -a_y dx + a_x dy.$$

Список літератури

1. Булах Е.Г., Шуман В.Н., Основы векторного анализа и теории поля. – Киев: Наукова думка, 1998.
2. Краснов М.Л., Киселев А.Н., Макаренко Т.Н. Векторный анализ. – Москва: Наука, 1978.
3. Романовский М.Л. Ряды Фурье. Теория поля. Аналитические и специальные функции. Преобразование Лапласа. – Москва: Наука, 1973.
4. Мышкис А.Д. Математика. Специальные курсы. – Москва: Наука, 1971.
5. Грищенко Ю.О., Нагнибіда М.І., Настасієв П.П. Теорія функцій комплексної змінної. Розв'язування задач. – Київ: Вища школа, 1994.
6. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – Москва: Наука, 1966.
7. Креневич А.П., Ловейкін А.В. Методичні вказівки до практичних занять із дисципліни "Векторний аналіз та теорія поля" для студентів механіко-математичного факультету спеціальності "Механіка" – Київ: ВПЦ "Київський Університет", 2012.
8. Романенко І.Б., Креневич А.П. "Векторний аналіз та теорія поля". Навчально-методичні вказівки до практичних занять. – Київ: ВПЦ "Київський Університет", 2008.
9. Ландау А.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. – Москва: Физматгиз, 1962.

Зміст